

П.Ф. Демченко, А.В. Кислов

**СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА
ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ**

**Броуновское движение
и геофизические приложения**

Москва
ГЕОС
2010

УДК 519.2
ББК 22.171
Д 12

Демченко П.Ф., Кислов А.В. Стохастическая динамика природных объектов. Броуновское движение и геофизические примеры – М.: ГЕОС, 2010. – 190 с.

ISBN 978-5-89118-533-3

Монография посвящена исследованию с единых позиций хаотического поведения различных природных объектов. Объекты выбраны из геофизики. Таковыми считается и вся планета в целом, когда исследуется неравномерность ее вращения; и глобальная климатическая система в случае изучения вариаций климата; это и озера – при анализе динамики уровней воды, и ледники – при исследовании вариаций их размеров; это деятельные слои суши и океана при исследовании колебаний влагозапасов почвы, изменчивости температуры и солености приповерхностных морских вод. В данной книге для описания флуктуаций природных объектов рассматриваются не все существующие стохастические методы, а только связанные с применением теории броуновского движения. Основой для применения концепции броуновского движения к природным объектам является возможность разделения совокупности флуктуаций их динамики на быстрые и медленные, согласно принятой в статистической физике терминологии. Важно, что на временах реакции медленных переменных на внешнее воздействие быстрые переменные теряют память об их предыдущем состоянии и могут рассматриваться как случайный процесс с заданной статистикой. Предельным случаем такой ситуации с разделением времен является трактовка воздействия быстрых переменных на медленные как воздействие белого шума – случайного процесса с исчезающе малым временем корреляции, так называемого дельта-коррелированного случайного процесса. В целом авторы постарались по возможности полно изложить возможности теории броуновского движения для описания изменчивости природных объектов. В монографии изложены некоторые современные методы неравновесной статистической механики, мало известные в науках об окружающей среде, полезные для построения стохастических моделей природных процессов.

Для специалистов по статистической геофизике, физике атмосферы и океана, гидрологии, метеорологии.

*Издание осуществляется при финансовой поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований по проекту № 10-05-07055-д*



© П.Ф. Демченко, А.В. Кислов
© ГЕОС

ВВЕДЕНИЕ

В этой книге с единых позиций исследуется хаотическое поведение различных природных объектов. Объекты выбраны из геофизики. Таковыми считаются и вся планета в целом, когда исследуется неравномерность ее вращения, и глобальная климатическая система в случае изучения вариаций климата, это и озера – при анализе динамики уровней воды, и ледники – при исследовании вариаций их размеров, это и деятельные слои суши и океана при исследовании колебаний влагозапасов почвы, изменчивости температуры и солености приповерхностных морских вод. Важно подчеркнуть, что объекты есть целостные структуры, что делает возможным интегральное описание их динамики. Динамика (или эволюция) объектов выражается в виде хаотичных (или стохастических) природных процессов.

Декларированный единый подход к анализу хаотической динамики заключается в том, что в каждом случае авторы используют один и тот же аппарат стохастических дифференциальных уравнений и неравновесной статистической механики. Возможность его применения базируется на понимании присущего природным процессам дуализма: с одной стороны, их динамика хаотична, с другой стороны, они подчиняются, как правило, детерминистически сформулированным физическим законам. Как объединить случайное поведение и детерминированное описание? Один из возможных путей решения этой проблемы заключается в том, чтобы определять параметры статистических моделей случайных процессов исходя из «первых принципов» (детерминированных законов), то есть использовать фундаментальные физические законы сохранения массы, энергии и импульса для расчета вероятностных характеристик поведения природных процессов. Возможно, именно в таком ключе можно интерпретировать известную фразу Альберта Эйнштейна о том, что «Бог не играет в кости» (хотя она была высказана по другому поводу – в дискуссии об основах квантовой механики).

При построении теории принципиальным является использование того обстоятельства, что динамика природных процессов «многомасштабна». Например, воздействие атмосферы на океан во многом протекает на синоптическом масштабе времени, составляющем несколько суток. При этом время реакции верхнего слоя океана на подобные «погодные воздействия» составляет несколько месяцев, что определяется теплоемкостью верхнего слоя океана. Еще более инерционные объекты окружающей среды (например, ледниковые щиты) реагируют на такого рода внешние возмущения на более длительных временных масштабах. Общая закономерность проявляется в том, что инерционные объекты интегрируют быстрые воздействия, обеспечивая накопление эффектов короткопериодных влияний, уводящее «медленную» систему от состояния равновесия. Однако при нарастании отклонений подключаются

стабилизирующие обратные связи, не позволяющие системе уйти далеко. Временные масштабы, на которых еще не сказываются обратные связи, относят к спектральному интервалу, где энергия увеличивается с ростом частоты (соответствующий случайный процесс называют в этом случае «красным шумом», или, более конкретно, «красным шумом» называют ситуацию, когда энергия растет обратно пропорционально квадрату частоты). На тех временных масштабах, на которых активизируются стабилизирующие процессы, дальнейший рост энергии флуктуаций прекращается. Мощность флуктуаций выходит на плато (не зависит от частоты), которое называется «белый шум». При этом белый шум может выступать как внешнее возбуждение для каких-то других, более инерционных объектов, и генерировать красншумовой спектр флуктуаций последних.

Совсем не обязательно считать, что широкий диапазон масштабов (временных и (или) пространственных) изменчивости какой-либо физической характеристики (температуры, скорости и т.д.) связан с наличием иерархически согласованного набора объектов со своими характерными временами реакции на внешние воздействия, которые дают вклад в результирующий спектр мощности флуктуаций. Широкий диапазон масштабов присущ движению сплошной среды. Так, в случае турбулентных флуктуаций скорости в несжимаемой жидкости существуют два пространственных масштаба. Это, во-первых, внешний масштаб L_0 , определяемый размером области течения жидкости. Во-вторых, l_v – масштаб вихрей, на которые начинают оказывать

влияние силы молекулярной вязкости: $l_v \sim \varepsilon^{-1/4} \nu^{3/4}$ (ε – скорость диссипации кинетической энергии, ν – кинематическая вязкость). Для локально однородной изотропной турбулентности распределение энергии флуктуаций – спектр S – по волновым числам k в инерционном интервале $L_0 \gg k^{-1} \gg l_v$ определяется процессом передачи кинетической энергии от больших масштабов к меньшим (каскад Ричардсона). В этом интервале не содержится более никаких масштабов, связанных с определенными физическими объектами, а спектр подчиняется закону Колмогорова–Обухова: $S \sim k^{-5/3}$ [Монин, Яглом, 1967]. Еще одним из таких примеров является фликкер – шум с частотным спектром $S \sim \omega^{-1}$ (ω – круговая частота), широко распространенный в технических устройствах, в частности в электронных лампах [Рытов, 1976; Климонтович, 1982]. Для описания таких флуктуаций широко применяется ряд математических методов, связанных с теорией броуновского движения (см. далее). Например, спектр Колмогорова–Обухова можно получить для движения жидкой частицы под действием белого шума [Голицын, 2004].

Для описания флуктуаций природных объектов будут рассматриваться не все существующие стохастические методы, а только связанные с применением теории броуновского движения. Термин *броуновское движение* обязан своим происхождением шотландскому ботанику Роберту Броуну, который в 1887 г. исследовал беспорядочное движение взвешенной в воде пылцы рас-

тений, причем длительное время он посвятил изучению вопроса, не является ли это движение следствием проявления жизнедеятельности. В 1905 г. Альберт Эйнштейн дал теорию этого процесса и фактически заложил основы анализа флуктуаций методами стохастических дифференциальных уравнений. Основой для применения концепции броуновского движения к природным объектам является возможность разделения совокупности флуктуаций их динамики на «быстрые» и «медленные», согласно принятой в статистической физике терминологии. Важно, что на временах реакции медленных переменных на внешнее воздействие быстрые переменные теряют память об их предыдущем состоянии и могут рассматриваться как случайный процесс с заданной статистикой. Предельным случаем такой ситуации с разделением времен является трактовка воздействия быстрых переменных на медленные как воздействие белого шума – случайного процесса с исчезающе малым временем корреляции, так называемого дельта-коррелированного случайного процесса [Гардинер, 1986; Кляцкин, 1980]. Впервые эту идею для описания флуктуаций медленных объектов окружающей среды высказал Клаус Хассельманн [Hasselmann, 1976]. Реализация этой идеи, базирующаяся на обширном эмпирическом материале (раздел 1.1), позволяет применять к расчету статистических характеристик интересующих нас переменных развитый аппарат стохастических дифференциальных уравнений.

Простейшим (но широко встречающимся в приложениях) примером таких уравнений является линейное уравнение Ланжевена, анализ которого дан в разделе 1.2. Оно содержит все необходимые составляющие для расчета статистических характеристик флуктуаций медленной переменной, связывая ее изменение во времени с дельта-коррелированным (или асимптотически приближающейся к ней) случайным воздействием и систематическим вкладом стабилизирующей обратной связи. Результирующий случайный процесс носит название процесса Орнштейна–Уленбека. В оригинальной трактовке Альберта Эйнштейна случайная сила соответствует действию частых соударений тяжелой частицы с многочисленными окружающими ее более легкими молекулами. Взаимодействие с этим «облаком легких частиц» оказывает на поведение тяжелой частицы двоякое влияние. С одной стороны, эти частые некоррелированные соударения вызывают случайные блуждания тяжелой частицы – броуновское движение. С другой стороны, именно из-за взаимодействия с облаком легких молекул возникает макроскопическое трение – стабилизирующая обратная связь. У природных объектов иной природы, которые рассматриваются в данной книге, есть свои стабилизирующие обратные связи. Расчет коэффициентов этих обратных связей и параметров случайных воздействий для различных природных объектов составляет значительную часть главы 3.

Современные методы неравновесной статистической механики позволяют выводить уравнения Ланжевена (в общем случае – нелинейные) для медленных переменных, исходя из уравнений для полной системы. Для этого, в частности, используется техника проекционных операторов [Mori et al., 1980]. Существенно, что теория позволяет рассчитывать эффекты запаздывания при воздействии быстрых переменных на медленные. Это позволяет учитывать важный случай, когда характерные времена собственной эволюции (без

взаимодействия флуктуаций) медленных и быстрых переменных отличаются не настолько сильно, чтобы для быстрых переменных выполнялось приближение дельта-коррелированного случайного процесса. При этом дифференциальные уравнения Ланжевена трансформируются в интегро-дифференциальные *обобщенные уравнения Ланжевена*. Скорость изменения медленных переменных разбивается на сумму трех слагаемых: мгновенной «медленной» скорости (зависит от текущих значений медленных переменных), интеграла памяти (зависит от изменений медленных переменных в прошлом) и короткопериодной составляющей – «случайной силы». Вывод обобщенных уравнений Ланжевена с изложением техники проекционных операторов дан в разделе 2.2.

В ряде случаев переход к уравнениям Ланжевена от исходных детерминированных уравнений требует выполнения их линеаризации относительно стационарного в среднем состояния. Это требование малости флуктуаций не является упрощением задачи (как обычно воспринимается процедура линеаризации), а вытекает из принципиального требования обеспечения работы с одним и тем же процессом на протяжении всей эволюции объекта.

В некоторых случаях, наоборот, важно описать качественные изменения в поведении коэффициентов обратных связей. В этом случае линейная теория не может быть использована. В качестве примера можно привести пересыхающие озера, когда система находится у порога применимости процедуры линеаризации, принятой для описания динамики уровня воды озера, наполненного водой. К аналогичным примерам можно отнести динамику влажности почвы в режиме избыточного увлажнения, когда важную роль играют процессы образования стока. В этом случае теория броуновского движения позволяет находить нелинейные уравнения для плотности вероятностей нерегулярных процессов в природных объектах. В разделе 2.3, следуя работам Кляцкина [1980, 2002], приводится один из методов вывода такого уравнения (уравнения Фоккера–Планка) из уравнения Ланжевена методом вариационных производных. Приведенный пример расчета времени корреляции флуктуаций влагозапаса почвы по теории броуновского движения во всем диапазоне изменения внешних параметров (включая смену режимов увлажнения) при сравнении с результатами моделирования методом Монте-Карло показывает эффективность теории.

При расчете флуктуаций климата важно уметь оценивать изменения, проходящие в атмосфере – наименее инерционном компоненте климатической системы. Стандартная постановка задачи предполагает расчет статистических характеристик изменчивости медленных компонент, таких, как температура поверхности океана, под действием быстрых атмосферных воздействий. В то же время низкочастотная изменчивость медленных компонент, индуцированная быстрыми атмосферными воздействиями, вызывает низкочастотную изменчивость в атмосфере. Для расчета этой компоненты изменчивости в главе 4 используется и развивается метод проекционных операторов. Такая задача ранее не решалась ни в рамках стандартной теории броуновского движения, ни в неравновесной статистической физике в целом. По-видимому, проблема такого рода просто никогда не возникала. Ее решение базируется на представлении об *эквивалентной стохастической системе*. Эквивалентная сто-

хастическая система в определении спектра флуктуаций в быстрой подсистеме эквивалентна исходной полной системе только в определении спектра атмосферы в низкочастотной области. Даны геофизические примеры, важные для анализа численных экспериментов по моделям общей циркуляции атмосферы и океана.

В книге по возможности полно изложены возможности применения теории броуновского движения для описания изменчивости природных объектов. Книга написана не совсем однородно, что отчасти отражает особенности методов работы каждого из авторов. Но в целом она объединена единством цели. В ней читатель, избегая громоздких математических выражений, найдет много полезных сведений о конкретных физических процессах в различных природных объектах. Иной читатель, хорошо знающий эти процессы, может найти для себя интересным знакомство с современными методами неравновесной статистической механики, мало известными в науках об окружающей среде, полезными для построения стохастических моделей природных процессов. Предполагается, что читатель знаком с курсами общей физики и высшей математики, включая теорию вероятностей, матричную алгебру и теорию дифференциальных уравнений.

Авторы выражают глубокую признательность за ценные консультации известным океанологам, гляциологам, климатологам и геофизикам В.С. Тужилкину, В.В. Поповнину, М.Крусификсу, Н.С. Сидоренкову, И.И. Мохову и особенно благодарны Г.С. Голицыну за внимание к работе и критические замечания, не воспринятые авторами, как «белый шум». Авторы отмечают и то, что именно Г.С. Голицын и И.И. Мохов инициировали работы по стохастическим моделям климата в Институте физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН.

Завершая вводный раздел, авторы хотят подчеркнуть общность развиваемого подхода и призывают специалистов других направлений и наук формулировать свои задачи в формате броуновского движения и включаться в бело-красное движение.

ГЛАВА 1. ХАОТИЧНОСТЬ КАК ТИПИЧНОЕ ЯВЛЕНИЕ ДИНАМИКИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

1.1. Эмпирические данные о динамике природных процессов

Временная динамика природных процессов крайне редко представляет собой регулярный колебательный процесс. Обычно (но не всегда) такое поведение является признаком детерминированности влияющих факторов и линейности отклика системы на внешнее воздействие. Даже суточный ход температуры вопреки распространенному мнению далеко не всегда представляет собой кривую, близкую к синусоиде, поскольку на формирование термического режима оказывает воздействие не только закономерный (астрономический) ход высоты Солнца над горизонтом в течение суток, но также неравномерная закрытость горизонта (в горных местностях), нерегулярное воздействие облачности, трансформирующее радиационный баланс, и адвективные изменения температуры за счет динамики воздушных масс разного происхождения. На рис. 1.1.1 показан пример суточных ходов температуры и модуля скорости ветра (задаваемого изменением термического режима, в том числе и суточными изменениями стратификации атмосферы). Из рис. 1.1.1 следует, что амплитуда меняется от суток к суткам, а в некоторых случаях (например, 11.06.2008) вообще нельзя говорить о существовании закономерных суточных изменений.

Сезонный ход радиационного баланса, задаваемый годовыми изменениями потока солнечной радиации, определяет сезонный цикл изменений тепло-содержания Мирового океана, что, вместе с собственно вариациями радиационного режима, и адвективными воздействиями определяет годовой ход температуры. Его можно хорошо описать несколькими гармониками, кратными годовому ходу, то есть наряду с собственно годовой периодичностью отчетливо прослеживается шестимесячная периодичность, а иногда видны и высокочастотные гармоники. Однако отклик природных процессов на годовой ход выглядит более сложно. Так, несомненная годовая периодичность прослеживается в динамике тропических муссонов [Петросянц и др., 2005]. Однако форма графиков, характеризующих временные изменения показателей муссонной активности, далека от синусоидальной. Так, в поведении осадков четко прослеживается чередование сухого и влажного периодов года, однако этап дождей начинается практически скачком, а завершается плавным переходом к сухому сезону.

Хорошим примером процессов, близких к периодическим, являются приливные явления в океанах и морях.

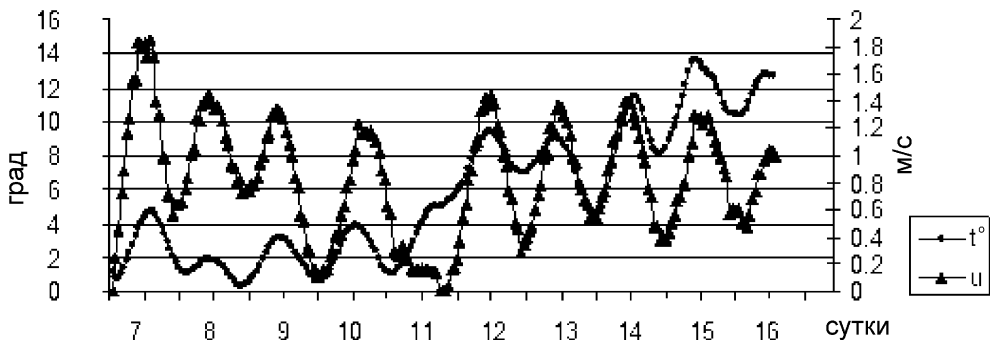


Рис. 1.1.1. Изменение температуры (t) и модуля скорости ветра (U) в приповерхностном слое (07.06–16.06.2008, Хибины, Кольский полуостров) (по данным измерений на Хибинской учебно-научной станции географического факультета МГУ)

Имеется, наконец, совсем немного явлений, у которых цикличность или, скорее, ритмичность (поскольку «цикличность» все-таки подразумевает гармонический вид динамики) определяется во многом внутренними свойствами системы. Так, регулярный характер имеет так называемая квази-двухлетняя цикличность – удивительно закономерное чередование западных и восточных потоков воздуха экваториальной стратосферы с периодом, близким к 24 месяцам [Холтон, 1979]. Однако данная периодичность не является супергармоникой годового хода – это случайное совпадение. Возникновение квазидвухлетней цикличности обусловлено нелинейным взаимодействием вертикально распространяющихся экваториальных волн с стратосферной циркуляцией [Кулямин и др., 2008].

Ритмический характер имеют перестройки общей циркуляции атмосферы, известные как Южное колебание и Северо-Атлантическое колебание – NAO (North Atlantic Oscillation). Последнее отражает согласованную динамику Исландского минимума и Азорского максимума атмосферного давления над Атлантическим океаном (рис. 1.1.2), или, более общо, является наиболее отчетливо регионально выраженной частью так называемого Арктического колебания – последовательного согласованного усиления и ослабления межширотного градиента давления. Как и другие механизмы дальних связей, NAO

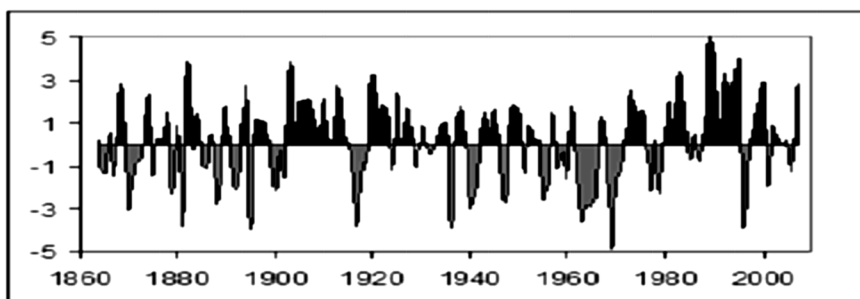


Рис. 1.1.2. Межгодовые изменения индекса NAO (North Atlantic Oscillation)

наиболее отчетливо выражено при использовании осредненных данных (средних за месяц или сезон). Для диагностирования NAO используют специальный индекс который рассчитывается как разность между нормированными значениями аномалий давления, измеренного на станциях, характеризующих условия Азорского антициклона (δp_A) и Исландской депрессии (δp_I):

$$I_{NAO} = \frac{\delta p_A}{\sigma_A} - \frac{\delta p_I}{\sigma_I}.$$

Стоящие в знаменателе величины есть соответствующие средние квадратические отклонения, рассчитанные по всему ряду наблюдений. В качестве станций, характеризующих поведение Азорского антициклона, используется Понта Делгада (Азорские острова), Лиссабон или Гибралтар. Для описания поведения давления в исландской депрессии применяются данные наблюдения за давлением в Рейкьявике. В некоторых случаях индекс NAO рассчитывается не по стационарным данным, а по полю давления, интерполированному в узлы регулярной сетки географических координат.

NAO хорошо проявляется в холодное время года. На рис. 1.1.2 представлены межгодовые изменения. Видно, в частности, что отрицательные значения, определяющие ослабление вторжений атлантического воздуха на Европу, характерны для 50-х и 60-х годов XX столетия, затем наступил период господства положительной фазы NAO, продолжавшийся примерно до середины 1990-х годов, сменившийся затем этапом перемежающихся положительных и отрицательных значений I_{NAO} , продолжающимся по настоящее время.

Южное колебание представляет собой последовательность переходов состояния атмосферы и тропического Тихого океана из стадии Эль-Ниньо в стадию Ла Нинья. На рис. 1.1.3 представлена динамика индекса Южного колебания (Southern Oscillation Index), рассчитываемого как разность нормализованных аномалий атмосферного давления по данным измерений двух станций (обычно это Дарвин (Австралия) и Сант-Яго (Чили)). Однако далеко не все диагностируемые год за годом аномалии настолько отчетливы во всей совокупности признаков, чтобы быть четко отнесены к какому-то определенному классу.

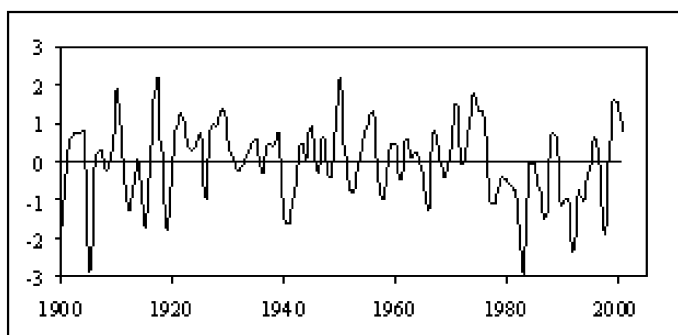


Рис. 1.1.3. Межгодовые изменения индекса Южного колебания SOI (South Oscillation Index)

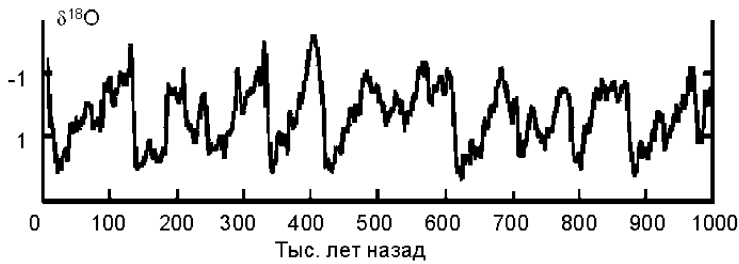


Рис. 1.1.4. Динамика климата за последний миллион лет по данным содержания тяжелого изотопа кислорода в отложениях приповерхностного планктона (по материалам [Imbrie et al., 1984]) глубоководного бурения донных отложений океана, скважина ODP 677, Рифт Коста-Рика)

Более длительные «декадные» колебания характеризуются специальными индексами PDO (Pacific Decadal Oscillation) в Тихоокеанском регионе и AMO (Atlantic Multidecadal Oscillation) в Атлантическом океане.

Переходя к «сверхдлинным» процессам, выделим хорошо выраженный ~100 000-летний цикл изменений климата, который четко виден на рис. 1.1.4.

В тех случаях, когда периодичность визуально трудно обнаружить, скрытые периодичности могут быть выявлены с помощью спектрального анализа. Методы спектрального анализа позволяют определять спектр мощности случайного процесса – средний квадрат Фурье-амплитуды разложения процесса по колебаниям различной частоты. Так получается информация о ритмах, проявляющихся «в среднем». Таков, например, спектр колебаний интенсивности Южного колебания у которого преобладает 3,7 и 4,9-летняя периодичность (рис. 1.1.5).

Наконец, огромное множество процессов представляет собой чередование экстремумов разных знаков, амплитуд и периодичностей, которые появляются,

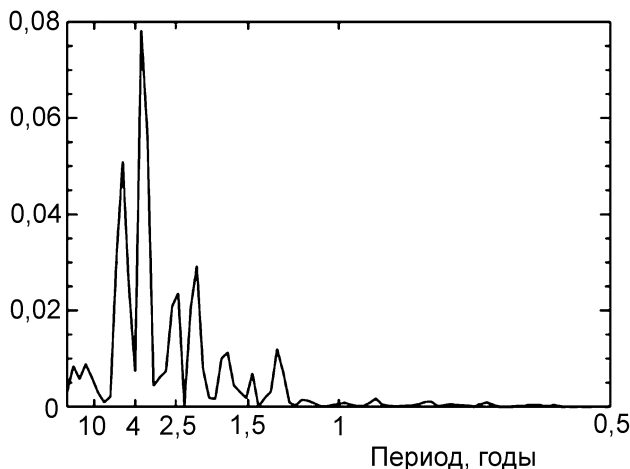


Рис. 1.1.5. Спектральная плотность вариаций индекса Южного колебания (построен по данным колебания индекса SOI – см. рис. 1.1.3)

исчезают, образуют повторяющиеся группы или следуют изолированно. Не ставя невыполнимую задачу перечисления всех квази-ритмических явлений, отметим, например, циклы Дансгора–Оешгера (продолжительностью в несколько сотен лет), четко зафиксированные не только в Гренландии и море Ирмингера (Лабрадорской котловине) (рис. 1.1.6), но проявляющиеся практически повсеместно в мире. Рис. 1.1.6 свидетельствует, что на протяжении холодной позднелепистоценовой эпохи климатический режим Северо-Атлантического региона неоднократно испытывал быстрые изменения, во время которых температура поднималась практически до современного теплого (последние 10 тыс. лет) уровня, а затем столь же быстро опускалась. Эта последовательность аномалий иногда повторялась несколько раз подряд (стадии 11, 10, 9 и 7, 6, 5), а иногда имели место единичные события. События Хайнриха (выброс необычно большого количества айсбергов из ледниковых щитов (Гренландского, Скандинавского, Лаврентийского, Исландского), диагностируемый по резкому росту в донных отложениях продуктов абразионной деятельности ледников на суше) также происходили нерегулярно во времени.

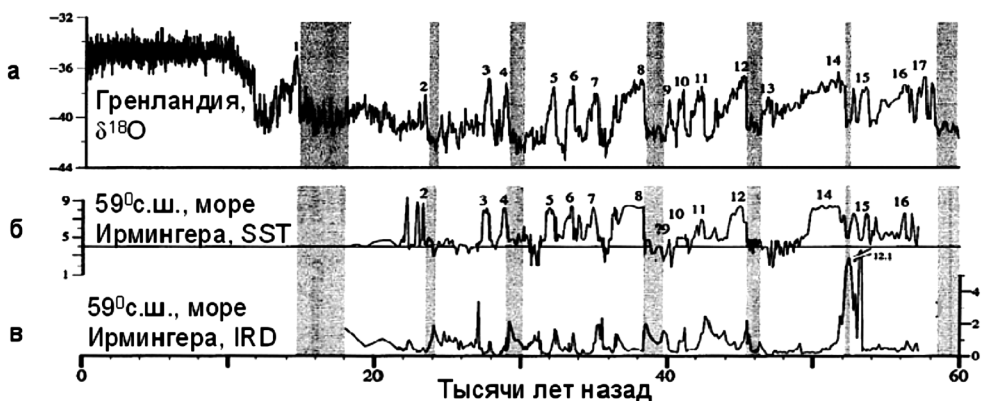


Рис. 1.1.6. Колебания климата в Северной Атлантике и Гренландии

а – динамика изотопа тяжелого кислорода по данным бурения ледникового щита Гренландии (проект GRIP); б – реконструированные вариации температуры воды на поверхности моря Ирмингера (Лабрадорская котловина); в – реконструированные вариации числа частиц (размером более 150 мкм) в грамме донных отложений (10^3 1/г). Цифры – номера теплых стадий Дансгора–Оешгера. Заштрихованы интервалы, отвечающие времени наблюдавшихся событий Хайнриха

Спектральный анализ различных временных рядов показывает, что пики на кривых функций спектральной плотности лишь изредка обладают статистической значимостью. Если собрать эти случаи, то оказывается, что фактически можно обнаружить колебания с любыми периодами. Эту точку зрения подтверждают результаты, представленные в табл. 1.1.1, в которой даны многочисленные примеры обнаруживаемых в динамике природных процессах периодичностей (для определенности авторы ограничились только межгодовыми вариациями, не превышающими первые сотни лет).

Если пики не достигают уровня значимости (что типично имеет место при обработке данных наблюдений или реконструкций), то отвечающие им флук-

Таблица 1.1.1. Периоды, соответствующие статистически значимым колебаниям, обнаруженным в спектрах различных индикаторов в разных регионах северного полушария (по [Stocker, Mysak, 1992; Добровольский, 2002], с добавлениями авторов)

Период колебаний, годы	Америка	Арктика	Европа
150	B (125, 170) O (110) T (110)	O (110, 170) O (100)	Hу (150) H (130) T (120)
100	B (95) TSS (83) T (70) T (60) B (50-60) TSS(10)	T (90) TSS (83) O (70) O (55) G,H (50) G (15)	I (100) TSS (83) G,I,T (60-70) Hу (60) Hу(13-26) TSS(10)

Примечание. Цифры в скобках – значение периодичности колебаний. Буквами обозначен вид данных, использованных для диагноза флуктуаций: В – биологические данные, С – по ^{14}C , G – гляциологические, H – исторические, Hу – гидрологические, I – инструментальные, O – по $\delta^{18}\text{O}$, T – дендроклиматические, TSS – глобально осредненные данные по температуре морской воды на поверхности.

туации могут рассматриваться как случайный результат выборочной изменчивости. Строго доказать истинную стохастичность такого рода колебаний (обладая дискретными рядами конечной длины) сложно. Однако все-таки можно отметить, что спектры (построенные, конечно, по дискретным рядам), имеют вид непрерывных распределений, что служит доводом в пользу представлений о истинной стохастичности.

Подводя итог, можно подчеркнуть, что выделяется очень мало квазипериодических процессов. В целом же подавляюще преобладающими являются непериодические случайные процессы.

Стохастический характер поведения временных рядов (или, в случае нескольких переменных, случайных полей) требует адекватного подхода к анализу, поэтому во многих случаях для анализа динамики природных процессов важным является использование статистических методов. В ряде случаев такой подход действительно является единственным, в других случаях он специально применяется для интегрального описания динамики сложного объекта, без детальной расшифровки тонких механизмов его поведения.

Плодотворным методом является подбор для описания временных серий стохастических моделей. Среди них наиболее эффективны, по-видимому, так называемые модели авторегрессии. Существуют различного уровня теоретические обоснования этого подхода (например, основанные на принятии принципа наибольшей энтропии [Dobrovolski, 1992]), однако наиболее важна, вероятно, эмпирически доказанная эффективность использования моделей такого рода в конкретных приложениях. В рамках данного подхода предполагается, что центрированный случайный процесс ξ аппроксимируется рядом

$$\xi_i = \sum_{m=1}^M c_m \xi_{i-m} + \alpha_i, \quad (1.1.1)$$

где c_m – коэффициенты авторегрессии, индекс « i » обозначает дискретный момент времени, α_i – последовательность нормально распределенных некоррелированных величин.

Практическое применение ряда (1.1.1) для аппроксимации случайных процессов различной природы показывает, что крайне редко для описания временной динамики природных процессов требуется $M > 1$ [Добровольский, 2002], поскольку с практической точки зрения одного слагаемого, как правило, достаточно для воспроизведения процесса с возможной для конкретного случая точностью. Это существенно упрощает ситуацию, позволяя использовать широко известные модели теории случайных процессов. В самом деле, в том случае, когда $M = 1$, модель авторегрессии первого порядка принимает вид марковского процесса первого порядка

$$\xi_i = c_1 \xi_{i-1} + \alpha_i. \quad (1.1.2)$$

Его важной разновидностью является случай так называемого винеровского процесса при $c_1 = 1$. В рамках модели предусмотрен и случай $M = 0$, когда $\xi_i = \alpha_i$, то есть моделью временной динамики служит белый шум.

Эти принципиальные особенности поведения данного случайного процесса полезно рассмотреть с точки зрения спектрального анализа. Как известно [Математическая энциклопедия..., 1977; Gilman et al., 1963], выражение для спектральной плотности процесса авторегрессии первого порядка описывается выражением

$$S(\nu) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1-c^2}{|\exp(i\nu) - c|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1-c^2}{1-2c \cos \nu + c^2}, \quad (1.1.3)$$

в котором ν – линейная частота. Причем, если $c \rightarrow 0$, то $S(\nu) = \text{const}$, соответствующий модели белого шума. Обратная зависимость (1.1.3) функции спектральной плотности от частоты часто называют «спектром красного шума».

Рассмотрим важный случай, когда изучаются низкие по сравнению с частотой Найквиста частоты. Тогда, раскладывая косинус в степенной ряд и ограничиваясь первым членом разложения, получим выражение

$$S(\nu) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1-c^2}{(1-c)^2 + c\nu^2}. \quad (1.1.4)$$

Если дополнительно ограничить частотный диапазон и снизу: $\nu \gg (1-c)/\sqrt{c}$, то спектральная плотность оказывается обратно пропорциональна квадрату частоты. В настоящей работе именно последнюю модель, с законом « -2 » будем называть красным шумом.

Закономерность $S(\nu) \sim \nu^{-2}$ можно рассматривать и с той точки зрения, что продолжительности аномалий определенного знака (понимаемых как поло-

вина «периода» колебаний – τ) и их величины («амплитуды» – a_τ) подобны на разных масштабах. В самом деле, имея в виду, что спектр по определению $S \sim a_\tau^2 \nu^{-1}$, а $\nu \sim \tau^{-1}$, получаем, что на любом временном масштабе $a_\tau \sim \sqrt{\tau}$.

Отсюда можно сделать два вывода.

Во-первых, продолжительные по времени аномалии должны быть гораздо интенсивнее, по сравнению с короткоживущими. Во-вторых, отдельные фрагменты кривых временной динамики случайных процессов, подчиняющихся «красношумному» поведению, имеют геометрию, подобную всей кривой. Верно и обратное утверждение. В работах [Кислов, 1981, 1989] факт выполнения закона красного шума в рядах палеоклиматических индикаторов был установлен именно путем проверки выполнения самоподобия климатических аномалий разного масштаба.

Отметим, что получившаяся зависимость $a_\tau \sim \nu^{-1/2}$ может быть интерпретирована в терминах понятий, введенных в разделе 1.2, как закономерность, описывающая величину амплитуды графика функции на отрезке, равном масштабу частоты (формула (1.2.19)). В этом случае показатель степени представляет собой индекс фрактальности и характеризует то, что у любого ряда, спектр которого «красный», он равен 1/2. Поскольку, как показано в разделе 1.2, индекс фрактальности связан с фрактальной размерностью, как $\iota = D - 1$, то получаем, что у авторегрессионного процесса первого порядка $D = 3/2$. Такая размерность есть типичная особенность броуновского движения.

Рассмотрим некоторые примеры, когда в спектрах, построенных по эмпирическим рядам, проявляется закон красного шума. На рис. 1.1.7 показаны спектры колебаний некоторых палеоиндикаторов.

Несмотря на то, что эти ряды совершенно различны как по тем величинам, которые они отображают, так и по дискретности и продолжительности, их

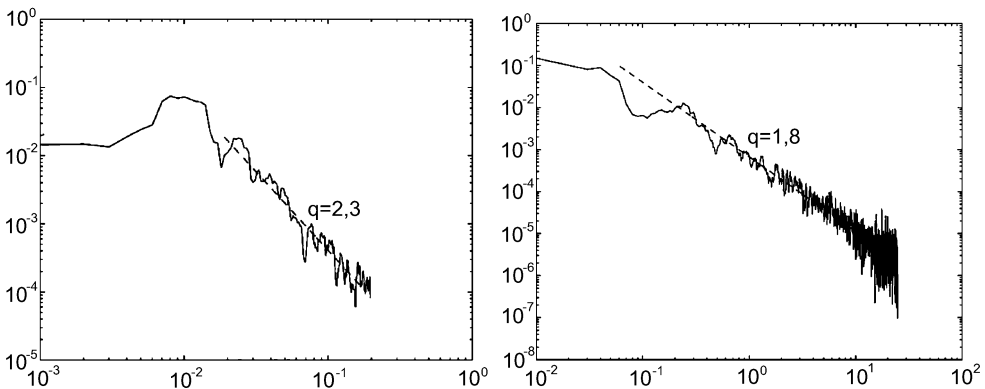


Рис. 1.1.7. Функции спектральной плотности (в логарифмических координатах) временных рядов, представленных на рис. 1.1.4 и рис. 1.1.6, а [Wunsch, 2003]

По оси абсцисс отложены частоты (1/год). Пунктир – прямая уравнения регрессии, проведенная по методу наименьших квадратов. Коэффициент регрессии есть показатель степени для частоты колебаний (формула (1.1.4)), получился равным 2.3 и 1.8, соответственно

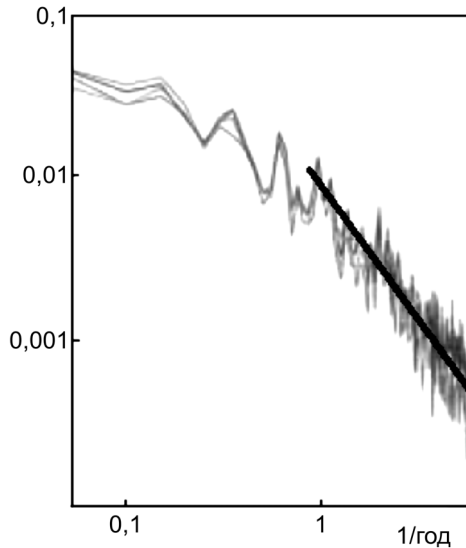


Рис. 1.1.8. Функция спектральной плотности (в логарифмических координатах) колебаний температуры поверхности океана (средняя для умеренных широт Тихого океана) за 1950–1994 гг., построенная по четырем различным базам данных [Dommenget, Latif, 2002]

Прямая линия соответствует закону красного шума

спектры обладают сходным поведением – на частотах, существенно превышающих частоту Найквиста спектр описывается функцией, практически совпадающей с $\sim \nu^{-2}$. На более низких частотах диагностируется низкочастотное колебание (100 000-летняя периодичность) и спектр выходит на плато. Такие закономерности, конечно, проявляются в спектрах далеко не всегда. Здесь специально были подобраны случаи, когда применимость авторегрессионной модели первого порядка очевидна и возможно, по крайней мере в принципиальном плане, построение физических моделей явлений.

В следующем примере рассматривается изменчивость температуры и солёности вод северо-восточной части Тихого океана. Видно, что в высокочастотной области спектры хорошо аппроксимируются зависимостью $\sim \nu^{-2}$. На более низких частотах спектр выходит на плато, причем для температуры и солёности характерно то, что зона перегиба располагается на разных частотах.

Следующий пример посвящен неравномерности вращения Земли. На рис. 1.1.9 представлен спектр, построенный по ряду непосредственных измерений угловой скорости вращения планеты. «Красношумное» поведение отчетливо проявляется на масштабах от суток до нескольких месяцев, затем, на межгодовых масштабах, график приобретает характер плато.

Таким образом, налицо широкая применимость модели авторегрессии первого порядка. Как будет показано в разделе 1.2, существует естественное сходство данной модели с уравнением Ланжевена, что позволяет во всех случаях, когда реальный процесс описывается авторегрессионной моделью и

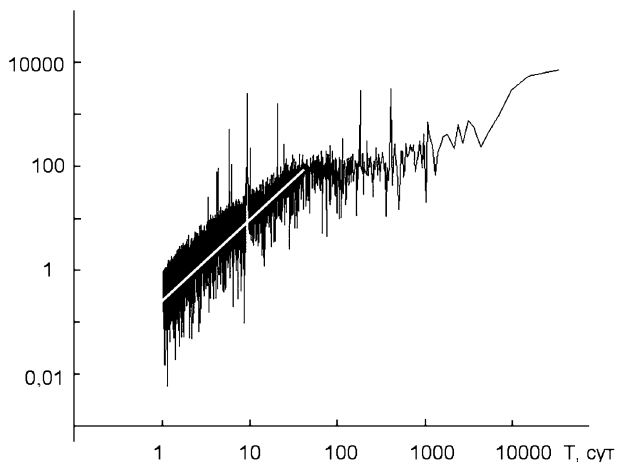


Рис. 1.1.9. Спектр флуктуаций угловой скорости вращения Земли

По оси абсцисс отложены периоды колебаний в сутках, по оси ординат – логарифм спектральной плотности в относительных единицах (рисунок любезно предоставлен Н.С. Сидоренковым). Белая линия соответствует закону красного шума

спектр является «красным», искать его теоретический аналог. В последующих разделах рассмотренные примеры (и другие задачи) обсуждаются именно с данной точки зрения – создания математической модели, опирающейся на «первые принципы» – фундаментальные физические законы сохранения массы, энергии и импульса, описывающей наблюдаемое поведение, соответствующее проявлению броуновского движения в макромасштабных природных процессах.

1.2. Свойства решения уравнения Ланжевена, классическое и фрактальное броуновское движение

В предыдущем разделе было показано, что, несмотря на сложность и многообразие природных явлений, в их временном поведении и пространственной структуре обнаруживаются идентичные закономерности. Это прежде всего авторегрессионное поведение временных рядов, наглядно отражающееся в спектрах в виде закономерностей белого и красного шума. Данные вероятностные особенности можно получить путем решения стохастического дифференциального уравнения Ланжевена. Оно может быть применено к различным процессам, однако первоначально было использовано для описания одномерной динамики броуновской частицы в «облаке» легких молекул (см. раздел 2.1). Данное уравнение имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda W + \eta. \quad (1.2.1)$$

Оно описывает «медленную» динамику состояния $W = W(t)$ инерционного объекта под влиянием быстро флуктуирующего внешнего воздействия [Ахманов и др., 1981; Рытов, 1976]. Как будет продемонстрировано далее, такая

математическая модель успешно применима для описания динамики состояния различных природных объектов и поведения различных процессов.

В этом уравнении λ описывает эффективность линейной обратной связи системы – эта величина определяется при выводе уравнения (1.2.1) и зависит от конкретных особенностей рассматриваемого «медленного» процесса, определяя характерное время его эволюции λ^{-1} . Интенсивность внешнего воздействия $\eta = \eta(t)$ считается очень быстро флуктуирующей случайной величиной. Выражение «очень быстро» следует понимать с точки зрения заданного масштаба медленных изменений. Внешнее воздействие может создаваться единственным фактором, а может быть представлено суммарным действием нескольких некоррелированных воздействий

$$\eta = \eta_a + \eta_b + \eta_c + \dots, \quad (1.2.2)$$

причем дисперсия выражается как

$$\sigma_\eta^2 = \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 + \dots \quad (1.2.3)$$

Уравнению (1.2.1) в зависимости от исследуемого объекта может придаваться различный смысл. Так, если W обозначает координату лагранжевой частицы, то случайным является распределение скоростей. В других случаях, трактуя уравнение (1.2.1) как выражение второго закона Ньютона, имеем картину случайного распределения ускорений. В этом случае можно говорить о случайных блужданиях в пространстве импульсов [Голицын, 2004 а, б].

Формально-статистические формулы, полученные в разделе 1.1, однозначно соотносятся с моделью стохастического дифференциального уравнения Ланжевена. Проще всего это соответствие можно продемонстрировать на следующем примере. Аппроксимируем, например, данное уравнение неявной дискретной схемой по времени:

$$\frac{W_i - W_{i-1}}{\tau} = -\lambda W_i + \eta_i, \quad (1.2.4)$$

и получим

$$W_i = cW_{i-1} + \tau\eta_i, \quad (1.2.5)$$

где обозначено $c = (1 + \lambda\tau)^{-1}$. Выражение (1.2.5) эквивалентно (при соответствующих вероятностных определениях) модели марковского процесса, описываемого соотношением (1.1.2).

Автокорреляционная функция такого случайного процесса может быть записана, например, в виде, традиционно используемом при анализе эмпирического материала:

$$\langle \eta(\xi)\eta(\eta) \rangle = \sigma_\eta^2 \exp(-|\xi - \eta|/\tau_r). \quad (1.2.6)$$

Для того чтобы отражать сущность рассматриваемой задачи, она должна быть быстро затухающей, то есть выполняется условие

$$\tau_r \ll \lambda^{-1}. \quad (1.2.7)$$

Условие множественности случайных воздействий, создаваемых функцией $\eta = \eta(t)$, в пределе, при стремлении интервала корреляции к нулю, позволяет говорить о том, что это так называемый дельта-коррелированный процесс.

Перейдем к нахождению решения уравнения (1.2.1). Это стохастическое уравнение, определяющее реализацию случайного процесса $W = W(t)$, несущую, именно в силу случайности, мало полезной информации. Поэтому процедура решения стохастического уравнения должна быть направлена на получение вероятностных характеристик описываемого уравнением случайного процесса. В случае уравнения Ланжевена решение этой задачи может быть получено следующим образом. Запишем вид точного решения уравнения (1.2.1) (как детерминированного обыкновенного дифференциального уравнения):

$$W(t) = W^0 e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda \xi} \eta(\xi) d\xi. \quad (1.2.8)$$

В разделе 3.5 рассматривается случай учета случайного характера начального состояния. Сейчас будем считать, что оно представляет собой детерминированную функцию. Возводя обе части выражения (1.2.8) в квадрат, предположив, что $\langle \eta(t) \rangle = 0$ и выполняя операцию усреднения, получим выражение для дисперсии в виде двойного интеграла

$$\sigma_W^2 = e^{-2\lambda t} \int_0^t \int_0^t e^{\lambda(\xi+\eta)} \langle \eta(\xi) \eta(\zeta) \rangle d\xi d\zeta. \quad (1.2.9)$$

Для его вычисления используем функцию корреляции вида (1.2.6), подставим ее в формулу (1.2.9) и, используя свойство четности функции корреляции по аргументу $\xi - \eta$, получим

$$\sigma_W^2 = 2\sigma_\eta^2 e^{-2\lambda t} \int_0^t \exp(\xi(\lambda - 1/\tau_r)) d\xi \int_0^\xi \exp(\eta(\lambda + 1/\tau_r)) d\eta. \quad (1.2.10)$$

Вычисление интегралов, с учетом условия (1.2.7), позволяет получить формулу, описывающую изменение дисперсии медленного процесса во времени

$$\sigma_W^2 = \frac{\tau_r \sigma_\eta^2}{\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}). \quad (1.2.11)$$

Отсюда следует, что на небольших отрезках времени $t \ll \lambda^{-1}$ дисперсия флуктуаций растет пропорционально времени,

$$\sigma_W^2 = 2\tau_r \sigma_\eta^2 t. \quad (1.2.12)$$

Последний результат методологически очень важен, поскольку демонстрируется возможность «саморазвития» природных объектов без какого-либо внешнего влияния, под действием внутреннего источника климатической системы.

На длительных отрезках времени $t \gg \lambda^{-1}$ достигается стационарное распределение, то есть

$$\sigma_{W, st}^2 = \frac{\tau_r \sigma_\eta^2}{\lambda}, \quad (1.2.13)$$

дисперсия уже не зависит от времени и процесс приобретает характер установившихся нерегулярных флуктуаций.

Рассмотрим спектральное представление случайной функции $W(t)$, описываемой уравнением (1.2.1). Ее функция спектральной плотности должна зависеть от спектра случайной функции $\eta(t)$. Действительно, представляя $\eta(t) = \Gamma_k \exp(i\omega_k t)$, ищем решение уравнения (1) в виде $W(t) = \Phi_k \exp(i\omega_k t)$. Подставляя в уравнение (1.2.1), для любого k получим

$$(i\omega_k + \lambda)\Phi_k = \Gamma_k. \quad (1.2.14)$$

Если считать, что Φ_k, Γ_k есть коэффициенты Фурье в спектральном представлении случайных функций $W(t)$ и $\eta(t)$, то из-за условия ортогональности отличаться от нуля будут только такие усредненные произведения, у которых индексы одинаковы, то есть $\langle \Phi_k^* \Phi_k \rangle, \langle \Gamma_k^* \Gamma_k \rangle$. Поэтому, умножая левую и правую часть (1.2.14) на комплексно сопряженную величину, получим

$$(\omega^2 + \lambda^2) \langle \Phi_k^* \Phi_k \rangle = \langle \Gamma_k^* \Gamma_k \rangle. \quad (1.2.15)$$

$\langle \Phi_k^* \Phi_k \rangle, \langle \Gamma_k^* \Gamma_k \rangle$ характеризуют математическое ожидание энергии случайного колебания частоты ω_k , то есть описывают вклад данного колебания в общую дисперсию. Данная закономерность справедлива для любого номера, то есть для любой частоты. Обозначим $S_W(\omega) \equiv \langle \Phi_k^* \Phi_k \rangle, S_\eta(\omega) \equiv \langle \Gamma_k^* \Gamma_k \rangle$ и получим

$$S_W(\omega) = \frac{S_\eta(\omega)}{\omega^2 + \lambda^2} \quad (1.2.16)$$

выражение, демонстрирующее взаимозависимость спектров выходного и входного сигналов.

Для разных моделей случайных процессов $S_{\eta}(\omega)$ будет различно, однако в рамках данной книги особенный интерес вызывает ситуация, когда случайный процесс, вызывающий эволюцию инерционной системы, является дельта-коррелированным. В этом случае прямой расчет показывает, что спектр представляет собой постоянную величину, которую обозначим как $S_{\eta}(\omega) = S_{\eta}$ (так называемый «белый шум»), и выражение (1.2.16) принимает вид

$$S_W(\omega) = \frac{S_{\eta}}{\omega^2 + \lambda^2}. \quad (1.2.17)$$

На сравнительно высоких частотах ($\omega^2 \gg \lambda^2$) спектральная функция возрастает пропорционально ω^{-2} . Случайный процесс, характеризуемый таким спектром, называется «красный шум» (см. формулу (1.1.7)). С уменьшением частоты скорость изменения постепенно уменьшается, и при ($\omega^2 \ll \lambda^2$) спектр функции отклика имеет характер белого шума.

Рассмотрим теперь особенности броуновского движения и свойства решений уравнения Ланжевена с точки зрения поведения геометрии траектории броуновской частицы. В этом случае можно говорить о том, что образами стохастических процессов служат геометрически сложные структуры, многие из которых являются фракталами. Понимание этого обстоятельства дает дополнительные возможности в анализе случайных процессов.

Условие линейного роста дисперсии со временем (выражение (1.2.12)) типично для броуновского движения. Дополнительным условием является требование гауссового характера приращений и их статистическая независимость на непересекающихся интервалах. Предполагая эти условия выполненными, можно считать, что при малых временах вариации ведут себя как «классическое» броуновское движение, описываемое винеровской моделью $dW/dt = \eta(t)$. На больших временах, когда эффективно проявляется обратная связь, поведение решения меняется.

Рассмотрим особенности броуновской частицы (или динамику иного показателя, описываемого уравнением (1.2.1)) с точки зрения фрактальной геометрии. Определим необходимые понятия. Как известно, фракталом называется структура (например, кривая на плоскости), части которой подобны ей самой [Фракталы ..., 1998]. Мерой количественного выражения подобия служит так называемая фрактальная размерность. Она вводится естественным путем, если возникает задача найти минимальное количество регулярных объектов, покрывающих какой-либо сложно устроенный объект. Так, для покрытия отрезка единичной длины его маленькими копиями (размером δ) их потребуется N штук, причем $(1/\delta) = N$. Для покрытия единичного квадрата его копиями (с размером стороны, равным δ) их требуется $(1/\delta)^2$ штук, а для куба – $(1/\delta)^3$ копий. В этих случаях показатель степени отражает размерность

пространства. Обобщая данные результаты на случай сколь угодно сложной кривой или поверхности, получим определение размерности в виде

$$D = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\ln N(\delta)}{\ln(1/\delta)}. \quad (1.2.18)$$

Не пытаясь рассматривать проблему в общем виде, будем считать, что фракталы располагаются в евклидовом пространстве. В качестве множества, покрывающего фрактал, используется N клеток, размер стороны которых равен δ . Пользуясь этим определением, рассмотрим более сложный по сравнению с предыдущими пример. Пусть имеется график функции $y = y(t)$. Без потери общности можно считать, что рассматривается единичный интервал определения, разделенный на n частей, равных $1/\Delta t$. Отградуируем аналогично и вертикальную ось, то есть выберем масштаб, равный $1/\Delta t$. Площадь, расположенная над одним i -м подинтервалом с размером Δt , включающая фрагмент функции $y = y(t)$, равняется $N_i \Delta t \Delta t$, где N_i – число квадратов, покрывающих в данном масштабе отрезок рассматриваемой кривой. С другой стороны, учитывая, что приращение функции в пределах этого подинтервала равняется Δy_i , можно приближенно написать: $\Delta y_i \Delta t \approx N_i \Delta t \Delta t$, причем ясно, что это выражение будет тем точнее, чем меньший масштаб Δt используется. Отсюда получается, что $N_i = \Delta y_i / \Delta t$. Всего имеется n подинтервалов, так что полное число квадратов $N = \sum_i N_i = \overline{\Delta y} / (\Delta t)^2$ (здесь $\overline{\Delta y}$ – среднее приращение за время Δt).

Дальнейшее продвижение в рамках общего подхода невозможно, поскольку динамика во времени произвольного случайного процесса может происходить по-разному. Для конкретизации результата необходимо принять какую-либо модель случайного процесса. Например, в случае случайного гауссового блуждания (модель броуновского движения, см. выше), приращение на интервале Δt , в среднем пропорционально $\sqrt{\Delta t}$. Поэтому получается, что $N = 1/(\Delta t)^{3/2}$, то есть размерность траектории броуновского движения равняется $3/2$.

Наряду с понятием размерности геометрия фрактала может быть охарактеризована так называемым индексом фрактальности [Дубовиков, Старченко, 2003]. Не останавливаясь на его строгом определении (разность метрической и топологической размерности фрактала), отметим его очевидную полезность, так как он характеризует размах вариаций фрактала. Действительно, рассмотрим поведение функции $y = y(t)$ на определенном отрезке, который разделим на n частей, каждый имеет размер δ . Составим величину

$$V_y(\delta) = \sum_{i=1}^n A_i(\delta), \quad (1.2.19)$$

где $A_i(\delta)$ – «размах», то есть разность между максимальным и минимальным значениями функции $y(t)$ в пределах $[t_{i-1}, t_i]$. Если

$$V_y(\delta) \propto \delta^{-l}, \quad (1.2.20)$$

при $\delta \rightarrow 0$, то показатель степени (l) и называется индексом фрактальности.

Между D и l существует однозначная связь. Чтобы ее установить, рассмотрим, как и ранее, наглядный случай клеточной размерности. Пусть опять, как было использовано выше, N_i – число квадратов (размером $\delta \times \delta$), покрывающих, в данном масштабе, рассматриваемую кривую на $[t_{i-1}, t_i]$. Тогда

имеет место неравенство $N_i \delta^2 - A_i(\delta) \delta \geq 0$. Разделим каждое слагаемое на δ и просуммируем по всем i . Получим $N(\delta) - V_y(\delta) \geq 0$. Здесь $N(\delta)$ – число клеток, покрывающих график функции $y(t)$. При переходе к пределу, используя определение индекса фрактальности, получаем $N(\delta) \cong \delta^{-(l+1)}$. Следовательно, $D = l + 1$.

Введем в рассмотрение еще один полезный показатель фрактала H , который определим, как $H = 2 - D$. Использование этой величины позволяет автоматически обобщить закономерности классического броуновского движения на случай так называемого фрактального броуновского движения, или фрактального гауссовского процесса – ФГП [Кроновер, 2000]. Для ФГП закон роста дисперсии пропорционально времени формулируется так:

$$\overline{(y(t+\tau) - y(t))^2} = k\tau^{2H}. \quad (1.2.21)$$

Здесь $0 < H < 1$. Размерность реализации ФГП равняется $D = 2 - H$, причем случай с $H = 1/2$ совпадает с классическим гауссовским случайным процессом. Функция распределения вероятностей описывается выражением [Кроновер, 2000]

$$P(\Delta X < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\tau^H}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\sigma\tau^H}\right)^2\right) du. \quad (1.2.22)$$

Рассмотренные зависимости естественно обобщаются на случай фрактальной поверхности (двумерное поле) – в этом случае $D = 3 - H$. Отметим, что индекс H совпадает с так называемым показателем Херста, который был использован как эмпирический индекс, описывающий зависимость от времени нормированного на стандартное отклонение размаха флуктуаций. Оказалось, что эта величина пропорциональна длине интервала в степени H .

Рассмотренные показатели полезны, в частности, потому, что делают возможным определение «интегральных» особенностей поведения фрактала. Сопоставление поведения временных рядов с различными значениями показателя Херста или индекса фрактальности показало, что при $0 < H < 1/2$ ($l > 1/2$, $D > 3/2$) процесс ведет себя знакопеременно, длительные тренды отсутствуют, система

возвращается к среднему значению. Ясно, что это может происходить в том случае, если в динамике системы активны отрицательные обратные связи, стабилизирующие ее поведение. При $1/2 < H < 1$ ($t < 1/2$, $D < 3/2$) поведение процесса иное – для него характерен небольшой уровень высокочастотного шума в сочетании с сохранением тенденций. Анализ различных эмпирических рядов показал, что действительно могут наблюдаться различные ситуации.

Так, в работе Кузнецова [2006] проанализированы ряды среднемесячных значений приземной температуры воздуха за период 1899–2002 гг. в средних широтах Северного полушария ($15\text{--}75^\circ$ с.ш.). Предварительно был отфильтрован высокочастотный шум – это было достигнуто тем, что предназначенные для анализа ряды «собирались» как сумма по трем главным компонентам при разложении рядов по естественным ортогональным векторам. Все значения показателя Херста попали в интервал $1/2 < H < 1$, то есть межгодовые изменения температуры оказались трендоустойчивыми с относительно низким уровнем шумов.

Естественно, что полученные теоретические результаты не будут меняться, если в качестве аргумента случайного процесса рассматривать не время, а пространственную координату. Так, авторы исследовали поля различных метеорологических величин у земной поверхности. Для эмпирической оценки H применено выражение (1.2.20), в котором в качестве аргумента использовалась пространственная координата. Реальные поля двумерны, однако, в силу их существенной изотропности и однородности, особенно на сравнительно небольших масштабах, можно рассматривать изменения как функцию одного переменного. Для среднемесячных значений температуры получилось, что $H \approx 0,45$. Принимая во внимание существенную неопределенность данных наблюдений, можно считать, что фактически $H = 1/2$. Аналогичный результат получился и для пространственного распределения как месячных, так и суточных сумм осадков. Можно констатировать, что в данном случае модель классического гауссовского случайного процесса служит хорошим приближением реальности.

Теперь вернемся к уравнению Ланжевена. Его решением как решением стохастического уравнения является выражение для дисперсии колебаний (1.2.11). Поставим вопрос о том, какие существуют значения H для аппроксимации поведения дисперсии. Ясно, что на очень малых (по сравнению с выбранным масштабом) временах $H = 1/2$. При рассмотрении более протяженных отрезков времени, определим H из выражения

$$(1 - e^{-2\lambda t}) \propto t^{2H}. \quad (1.2.23)$$

Получается, что

$$H \propto \frac{\ln(1 - e^{-2\lambda t})}{2 \ln t}. \quad (1.2.24)$$

Эта формула показывает, что уже на масштабах времени порядка $(2\lambda)^{-1}$ $H \rightarrow 0$.

Таким образом, на малых временах поведение решения уравнения Ланжевена представляет собой классический броуновский процесс. Однако с ростом

времени начинает все активнее проявляться отрицательная обратная связь, переводящая решение к стабилизации поведения системы, в динамике которой не может быть ни положительных, ни отрицательных «сверхдлительных» трендов. Вместо этого наблюдается появление локальных экстремумов определенного масштаба, обусловленных сильным возвращающим воздействием отрицательной обратной связи. В соответствии с введенными определениями при рассмотрении поведения решения на больших масштабах получающийся график зависимости от времени является фракталом с $D = 2$ ($\iota = 1$).

ГЛАВА 2. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ

2.1. Разделение переменных и движений на быстрые и медленные в природных системах

Формальные математические модели, рассмотренные в предыдущей главе, показали свою способность давать статистический прогноз эволюции различных природных объектов при условии, что статистика процессов, определяющих их эволюцию, не меняется в течении длительного времени – времени, достаточного для того, чтобы накопить объем данных, требуемых для формирования статистической модели (определения коэффициентов регрессии и интенсивности шумов). В действительности внешние по отношению к исследуемому объекту условия изменяются. К примеру, планетарные изменения климата сопровождаются изменениями статистики природных процессов регионального масштаба (засух, наводнений, лесных и степных пожаров, лавинной опасности и т.д.). Поэтому не существует гарантии от того, что статистические регрессионные модели с эмпирически определенными для современного периода коэффициентами и уровнем шума будут надежными в дальнейшем. Скорее можно уверенно ожидать обратной картины. Действительно, целый ряд эмпирических методик, успешно применявшихся в практике гидрометеорологических прогнозов в 1960–1970-х годах, стал давать неверные результаты в 1980-х годах, когда глобальное потепление климата нарушило казавшиеся незыблемыми связи. В этом случае методически простая задача построения физических моделей природных процессов с включением стохастической составляющей трансформируется в задачу статистической физики – теории, позволяющей вычислять параметры стохастических моделей исходя из исходных уравнений баланса энергии, импульса и вещества. В данной главе изложены методы, которые позволяют определять коэффициенты регрессии прогностических моделей исходя из исходных динамических уравнений.

Вывод стохастических дифференциальных уравнений, описывающих динамику природных объектов, из исходных динамических уравнений базируется на достаточно полно разработанной в неравновесной статистической механике идее «огрубленного», или «сжатого», описания систем со многими степенями свободы [Кайзер, 1990; Mazo, 1978]. Рассмотрим этот подход на примере явлений, происходящих в земной климатической системе. Согласно определению, данному Всемирной метеорологической организацией (ВМО), это есть «система, состоящая из взаимодействующих физических элементов атмосферы, океана, криосферы, поверхности суши и биомассы, которые из-

меняются в масштабах времени, превышающих время жизни индивидуальных возмущений синоптического масштаба» [Физические основы теории климата и его моделирования, 1977]. Процессы, протекающие в каждой из названных подсистем и при взаимодействии между ними имеют различные временные масштабы. Некоторые из этих масштабов существенно разнесены. Так, время релаксации аномалий температуры поверхности океана τ_w за счет контактного теплообмена с атмосферой, составляет, при учете только верхнего квазиоднородного слоя, несколько месяцев. На этих временах атмосферные воздействия за счет потоков тепла, влаги и импульса, происходящие с характерными временами корреляции τ_a , составляющим несколько суток, воспринимаются океаном как «шум». При этом статистические моменты этого «погодного» шума (средние, дисперсии и т.д.) в свою очередь могут зависеть от состояния более инерционного объекта (в данном случае – океана). Разделение временных масштабов позволяет применять для расчета статистики инерционных объектов математический аппарат теории броуновского движения.

Начало этой теории было положено в пионерных работах А. Эйнштейна, М. фон Смолуховского и П. Ланжевена [см., например, Кайзер, 1990; Mazo, 1978]. В первой пионерной работе А. Эйнштейна была рассмотрена задача определения среднего квадрата отклонения координаты тяжелой броуновской частицы массы m от ее первоначального положения \mathbf{r}_0 . Для того, чтобы

определить $\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0))^2 \rangle$ (угловые скобки здесь и далее означают статистическое осреднение), можно пойти по пути, который будет использоваться ниже – вычислить эту величину, если известна плотность распределения вероятностей траекторий системы вблизи точки \mathbf{r} (2.1.10). Однако Эйнштейн заменил осреднение по множеству траекторий на вычисление плотности распределения числа N броуновских частиц ($N \gg 1$) в пространстве $n(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)N$, считая, что в первоначальный момент все броуновские частицы сосредоточены в узкой окрестности $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0)$ $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0)$, а далее облако частиц распространяется в окружающее пространство по законам молекулярной физики с коэффициентом диффузии D . Таким образом решается классическая задача диффузии с сохранением общего числа частиц N , так что при $N = \text{const}$ решение для концентрации $n(\mathbf{r}, t)$ можно связать с вероятностной характеристикой $\rho(\mathbf{r}, t)$

$$\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) = D \Delta \rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.1.1)$$

где Δ – оператор Лапласа. Начальное условие для (2.1.1) – это условие сохранения общего числа частиц N для сосредоточенного первоначально в бесконечно малой окрестности \mathbf{r}_0 распределения, заданного через дельта-функцию Дирака: $\rho(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Оно задает симметричное в пространстве распределение вероятностей для $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, выраженное решением уравнения диффузии $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\{-(\Delta\mathbf{r})^2 / 4Dt\} = \rho_x(\Delta x, t) \rho_y(\Delta y, t) \rho_z(\Delta z, t). \quad (2.1.2)$$

В силу пространственной симметрии плотности вероятности смещения вдоль отдельной оси совпадают (с заменой обозначения пространственного аргумента). Тогда средний квадрат смещения броуновской частицы будет равен утроенному среднему квадрату ее смещения вдоль одной из осей (в силу той же пространственной симметрии). Определяя с помощью (2.1.2) средний квадрат смещения броуновской частицы в направлении x , получаем одно из самых известных соотношений статистической физики – пропорциональность квадрата смещения времени процесса

$$\langle (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0)^2 \rangle = 3\langle (\Delta x)^2 \rangle = 3 \frac{1}{(4\pi Dt)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 \exp\{-x^2 / 4Dt\} = 6Dt. \quad (2.1.3)$$

Следующий шаг в развитии теории сделал П. Ланжевен, который рассмотрел уравнения движения отдельной тяжелой частицы под действием соударений с газом легких молекул как движение отдельной частицы, движение которой подчиняется второму закону Ньютона (например, по координате x) с учетом линейного сопротивления трения по закону Стокса

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -6\pi\eta a \frac{dx}{dt} + F_x(t).$$

Здесь a – радиус броуновской частицы, η – коэффициент трения легкого газа, обтекающего массивную броуновскую частицу.

После умножения на x каждого члена уравнения и последующего осреднения получим

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} - mv^2 + 3\pi\eta a \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \langle F_x(t)x \rangle. \quad (2.1.4)$$

В (2.1.4) скорость броуновской частицы $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ можно определить из постулированной А. Эйнштейном и П. Ланжевеном выполнимости теоремы статистической физики о равном распределении энергии по степеням свободы

$$\frac{1}{2} \langle mv_x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T. \quad (2.1.5)$$

В (2.1.5) T – абсолютная температура, k_B – постоянная Больцмана – внешние параметры.

Далее П. Ланжевен предположил, что при осреднении по большому числу соударений легких молекул о поверхность массивной частицы последний член справа в (2.1.4) должен исчезать. Тогда из (2.1.4) с учетом (2.1.5) получаем уравнение для x^2

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \langle x^2 \rangle}{dt^2} + 3\pi\eta a \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = k_B T.$$

Тогда находим общее решение, как общее решение однородного плюс частное решение неоднородного:

$$\langle x^2(t) \rangle = C_1 \exp(-6\pi\eta a t / m) + C_2 + \frac{k_B T}{3\pi\eta a} t,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, из чего следует

$$\frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} + C \exp(-6\pi\eta a t / m),$$

где C – произвольная постоянная. Асимптотически:

$$\langle x^2(t) \rangle - x_0^2 = \frac{k_B T}{3\pi\eta a} \cdot t.$$

Это означает (с учетом симметрии $\mathbf{r}^2 = 3 \langle x^2 \rangle$)

$$\langle \mathbf{r}^2(t) - \mathbf{r}_0^2 \rangle = \frac{k_B T}{\pi\eta a} t. \quad (2.1.6)$$

Сравнение (2.1.6) и (2.1.3) приводит к известному соотношению (соотношение Эйнштейна) молекулярной теории броуновского движения между коэффициентом диффузии D и коэффициентом линейного трения ($6\pi a \eta$)

$$D = \frac{k_B T}{6\pi a \eta}. \quad (2.1.7)$$

Соотношение Эйнштейна (2.1.7) является первым примером так называемых флуктуационно-диссипативных соотношений, оно связывает флуктуационную характеристику (коэффициент диффузии) с диссипативной (коэффициент трения).

Эти первые работы положили начало теории броуновского движения, они содержали первое стохастическое дифференциальное уравнение – уравнение Ланжевена – и уравнение для плотности распределения вероятностей – простейший аналог уравнения Фоккера–Планка. Однако в работе П. Ланжевена содержалось интуитивное предположение об обращении в ноль последнего члена в (2.1.4). Для создания методов расчета таких членов потребовалось несколько десятилетий, в течение которых была создана теория стохастических интегралов [Гардинер, 1986].

Достижения теории броуновского движения во многом базировались на принципе об известном распределении кинетической энергии по степеням свободы частицы. В сложных динамических системах, таких, как климатиче-

ская система, подобных «известных» соотношений не существует. Единственный путь поиска решения – это разделение переменных на медленные и быстрые в исходных динамических уравнениях. Математическая теория подобных процессов хорошо разработана и позволяет применять для описания изменчивости медленных инерционных природных объектов аппарат стохастических дифференциальных уравнений и диффузионных случайных процессов [Кляцкин, 1980, 2001, 2002; Arnold, 2001; Гардинер, 1986]. В таких моделях короткопериодные («погодные» в случае рассмотрения аномалий температуры океана) возмущения выступают в качестве короткопериодных случайных воздействий – «белого шума», статистические характеристики которого предполагаются либо известными, либо определяемыми по полуэмпирическим формулам через медленные переменные.

Идею взаимосогласованного описания долгосрочных аномалий погоды и изменчивости состояния океана, отфильтровывая переходные синоптические процессы, одним из первых высказал А.С. Монин. Он предложил ввести «понятие адаптации атмосферы к тепловому полю океана, при котором синоптические изменения погоды играют роль переходных процессов, а долгосрочные аномалии погоды и медленные изменения теплосодержания верхнего слоя океана суть «проекции» эволюции взаимно глобально приспособленных атмосферных и океанических полей» [Монин, 1969]. При этом единственным явно рассматриваемым нестационарным полем будет теплосодержание верхнего слоя океана. Аналогичную идею об адаптации полей медленных $\{Y_i\}$ и быстрых $\{X_\alpha\}$ переменных, но уже при моделировании эволюции океана, высказал Ф. Брезертон, который предложил выделить отдельно два фрагмента теории: 1) эволюцию океанской составляющей системы и 2) адаптированное к полю аномалий температуры поверхности океана состояние атмосферы как среднее по множеству численных экспериментов ее стационарного отклика на заданное поле этих аномалий [Bretherton, 1982]. Эти положения составляют первый шаг так называемой стохастической теории климата К. Хассельманна [Hasselmann, 1976], где в качестве набора медленных переменных $\{Y_i\}$ выступают аномалии температуры океана в отдельных географических «точках», а в качестве быстрых $\{X_\alpha\}$ – атмосферные переменные (латинские и греческие индексы в этой главе относятся соответственно к переменным медленной и быстрой подсистем).

При этом сделано предположение, что быстро флуктуирующие процессы (время корреляции которых τ_X) могут интегрироваться инерционными звеньями системы (например, океаном) и индуцировать их низкочастотный отклик (время корреляции которого $\tau_Y \gg \tau_X$). Поэтому возмущения («синоптического» масштаба) должны учитываться в более «плавных» («климатических») уравнениях в виде добавочных быстрофлуктуирующих случайных членов. В этом и состоит второй шаг теории.

Данный подход позволяет применять к описанию низкочастотной изменчивости инерционных природных объектов теорию броуновского движения. В ней движение медленных переменных рассматривается по аналогии со случайным перемещением тяжелой частицы в газе легких молекул. Эту ситуацию можно образно представить как полет барона Мюнхгаузена в «облаке» множества ядер, изображенный на знаменитой гравюре Г. Доре. На рис. 2.1.1 эта ситуация передана современной художницей с добавлением векторных обозначений и примерами из физических экспериментов. Правда, барон мог по собственному желанию пересаживаться с ядра на ядро, в то время как тяжелая частица увлекается в определенном направлении случайным образом. На больших временах, в отличие от ситуации с Мюнхгаузеном, в подверженной случайным воздействиям системе включаются механизмы обратных связей, которые не



Рис. 2.1.1. Барон Мюнхгаузен как «броуновская частица» (рисунок А.В. Ракичиной)

В верхней части рисунка изображен лист наблюдений за стохастическим движением коллоидной частицы из лабораторного журнала Ж. Перена. Ниже – современные наблюдения

дают ей уйти от некоторого статистически стационарного состояния. Однако при этом и состояние быстрых переменных также должно претерпевать изменения, содержащие через взаимодействие с медленными процессами интегральную память о прошлых быстрых воздействиях. Образно говоря, барон ведь утяжеляет ядро. Для количественного описания статистических характеристик в такой ситуации (характерной для эволюции многих элементов окружающей среды) необходимо привлечение ряда методов, которые используются при анализе исходных динамических уравнений.

Интересующие нас инерционные природные объекты представлены медленной подсистемой \mathbf{Y} , являющейся частью полной системы $\mathbf{Z}=\{\mathbf{X},\mathbf{Y}\}$ (здесь и далее выделение переменных жирным шрифтом означает вектор, матрицу или оператор). Причем принципиальный вопрос о том, распадается или нет полная система на быструю и медленную, в общем виде не ставится. Обычно каждая подсистема конструируется независимо, а их стыковка осуществляется естественным путем – там, где для быстрой системы надо учесть медленные изменения параметров и граничных условий, а для медленной системы – воздействие шумов.

С математической точки зрения идея проецирования эволюции полной системы на состояние медленной реализуется с помощью метода проекционных операторов, впервые введенного Р. Цванцигом и Х. Мори [Mori, 1980; Куни, 1981; Mazo, 1978]. Исходной для обоих авторов является полная система эволюционных уравнений (здесь для простоты будем считать ее автономной), базирующаяся на физических законах сохранения, которой подчиняется каждая отдельная реализация $\{\mathbf{X}(t),\mathbf{Y}(t)\}$:

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = U_i(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)), \quad i = 1, \dots, N_Y \quad (2.1.8)$$

$$\frac{dX_\alpha(t)}{dt} = u_\alpha(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)), \quad \alpha = 1, \dots, N_X. \quad (2.1.9)$$

Введем понятие индикаторной функции φ от какой-либо переменной $\mathbf{Z}(t)$, характеризуемой выражением $\varphi = \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z})$, в котором $\delta(\mathbf{Z})$ есть дельта-функция Дирака. Статистическое среднее индикаторной функции имеет ясный физический смысл, характеризуя заполненность траекториями окрестности заданной точки \mathbf{Z} , то есть плотность распределения вероятностей определяется как $\rho_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, t) = \langle \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}) \rangle$.

Физический смысл определения плотности вероятности как среднего от индикаторной функции ясен: плотность вероятности равна средней частоте прохождения траектории $\mathbf{Z}(t)$ в бесконечно малой окрестности заданной точки \mathbf{Z} . Для обоснования этого [Кляцкин, 2002] рассмотрим функцию вероятности P нахождения случайной величины ξ в области $(-\infty < \xi < z)$ и введем функцию $F(z)=P(-\infty < \xi < z)$. Соответствующая плотность распределения $\rho_{\mathbf{Z}} =$

dF/dz . Ее можно найти по выборке N случайных значений выборочных $z(t) = \xi^{(k)}$ при $N \rightarrow \infty$. Для простоты рассмотрим одномерный случай

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \frac{dF(z)}{dz} = \frac{d}{dz} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(\xi^{(k)} < z)}{N} = \frac{d}{dz} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N H(z - \xi^{(k)}) = \\ &= \frac{d}{dz} \langle H(z - \xi) \rangle = \langle \delta(\xi - z) \rangle. \end{aligned}$$

Величина n соответствует числу элементов выборки, удовлетворяющих соответствующему условию (в скобках). Здесь мы воспользовались тем, что производная от ступенчатой функции – функции Хэвисайда $H(x) = [0 (x < 0); 1 (x \geq 0)]$ – равна дельта-функции Дирака [Кляцкин, 1980]. Переход к многомерному случаю не представляет затруднений.

Тогда в момент времени t плотность распределения вероятностей решений системы (2.1.8)–(2.1.9) равняется [Кляцкин, 1980, 2001, 2002]

$$\rho_Z(\mathbf{Z}, t) = \langle \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}) \rangle = \langle \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}) \delta(\mathbf{Y}(t) - \mathbf{Y}) \rangle = \rho_{XY}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t). \quad (2.1.10)$$

В (2.1.10) векторные переменные с явной зависимостью от t относятся к отдельным траекториям системы, по которым производится процедура статистического осреднения.

С другой стороны, плотность распределения вероятностей исходной динамической системы подчиняется уравнению Лиувилля, которое можно получить тождественными преобразованиями из исходной динамической системы (2.1.8), (2.1.9) [см. например, Куни, 1981]

$$\partial_t \rho_Z = \mathbf{L} \rho_Z = \partial_t \rho_{XY} = (\mathbf{L}_X + \mathbf{L}_Y) \rho_{XY}, \quad (2.1.11)$$

где операторы Лиувилля для быстрой и медленной подсистем действуют на произвольную функцию f по формулам

$$\mathbf{L}_X f = -\partial_\alpha (u_\alpha f), \quad \mathbf{L}_Y f = -\partial_i (U_i f). \quad (2.1.11a)$$

В (2.1.11), (2.1.1a) приняты обозначения

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_\alpha}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial Y_i},$$

а по повторяющимся индексам здесь и далее подразумевается суммирование.

Метод получения уравнения (2.1.11) исходя из исходной динамической системы (2.1.8), (2.1.9) опирается на свойство четности дельта-функции. Из четности дельта-функции следует соотношение для производной индикаторной функции по какой-либо из переменных Z (∂Y_i или X_α): $\partial \varphi / \partial Z(t) = -\partial \varphi / \partial Z$. С помощью этого соотношения для производной по времени от индикаторной функции и уравнений движения (2.1.8), (2.1.9) следует

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi &= (-\partial_i \varphi) \frac{dY_i(t)}{dt} + (-\partial_\alpha \varphi) \frac{dX_\alpha(t)}{dt} = -\partial_i (\varphi \frac{dY_i(t)}{dt}) - \partial_\alpha (\varphi \frac{dX_\alpha(t)}{dt}) = \\ &= -\partial_i (\varphi U_i(t)) - \partial_\alpha (\varphi u_\alpha(t)). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Осредняя выведенное для индикаторной функции уравнение (2.1.12), получим (2.1.11). На последнем шаге вывода уравнения существенно, что индикаторная функция является дельта-функцией Дирака.

Подходы Р. Цванцига и Х. Мори к сжатию описания состояния системы различаются между собой так же, как в квантовой механике, отличаются картины А. Шредингера и В. Гейзенберга. [Ферми, 1965]. В представлении Шредингера эволюция состояния системы задается уравнением для волновой функции – уравнением Шредингера, в которой и заключена вся возможная информация о поведении квантового объекта. Аналогом ее в подходе Р. Цванцига является плотность распределения вероятностей исходной системы (2.1.8), (2.1.9). Сжатие описания сводится к получению уравнения только для плотности вероятностей медленных переменных. В представлении Гейзенберга квантовой механики с помощью зависящего от времени оператора эволюции (так называемой S -матрицы) вычисляется зависимость от времени вектора начального состояния. Аналогом этой процедуры в подходе Х. Мори является построение сжатого описания в пространстве начальных значений динамических переменных. Подход Х. Мори приводит к стохастическому интегро-дифференциальному уравнению – обобщенному уравнению Ланжевена, которое в случае значительного разнесения характерных времен быстрых и медленных процессов переходит в обычное уравнение Ланжевена (не обязательно линейного).

Рассмотрим *метод проекционных операторов Цванцига*. В этом подходе исходным является уравнение (2.1.10) для полной плотности распределения вероятностей ρ_{XY} . Состояние системы в огрубленном описании определяется плотностью вероятностей медленных переменных $\rho_Y(\mathbf{Y}, t)$, которое можно определить, зная точное решение задачи Коши для уравнения (2.1.10) при известном начальном распределении $\rho_{XY}(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0, t_0)$ в момент времени t_0 , и далее проинтегрировав решение по \mathbf{X} . Редуцированное (сжатое), описание полной плотности вероятности достигается с помощью проекционного оператора \mathbf{P} , который действует на произвольную функцию $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t)$ по формуле

$$\mathbf{P}f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t) = \rho_{red}(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) \int_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t) d\mathbf{X} = \rho_{red}(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) f_\Sigma(\mathbf{Y}, t). \quad (2.1.13)$$

В (2.1.13) $f_\Sigma(\mathbf{Y}, t)$ обозначает проинтегрированную по \mathbf{X} функцию f , а ρ_{red} как функция x , нормирована на единицу и имеет смысл некоторой условной плотности вероятности. В частности

$$\mathbf{P}\rho_{XY} = \rho_{red}(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) \int_{\mathbf{X}} \rho_{XY}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t) d\mathbf{X} = \rho_{red} \rho_Y(\mathbf{Y}, t) = \rho_1. \quad (2.1.13a)$$

Оператор \mathbf{P} является проекционным, он проецирует произвольную функцию на подпространство функций определенного вида по формуле (2.1.13) и обладает свойством $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}^2 f = \rho_{red}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) \int_{\mathbf{X}} d\mathbf{X} \rho_{red}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) f_{\Sigma}(\mathbf{Y}, t) = \rho_{red}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) f_{\Sigma} = \mathbf{P}f.$$

Максимальная информация о состоянии системы в сжатом описании заключена в функции $\mathbf{P}\rho_{XY}$, задаваемой (2.1.13а). Остаток $g = (\mathbf{1}-\mathbf{P})\rho_{XY} = \mathbf{Q}\rho_{XY}$ ($\mathbf{1}$ – единичный, тождественный оператор) несет в себе несущественную для целей сокращенного описания микроскопическую информацию (дополнительный к \mathbf{P} оператор $\mathbf{Q}=(\mathbf{1}-\mathbf{P})$ – тоже проецирующий: $\mathbf{Q}^2=\mathbf{1}$ и $\mathbf{PQ}=\mathbf{QP}=0$). Последовательное применение операторов \mathbf{P} и \mathbf{Q} к уравнению (2.1.11) приводит его к системе двух линейных дифференциальных уравнений для функций $\mathbf{P}\rho_{XY}$ и $\mathbf{Q}\rho_{XY}$:

$$\partial_t \mathbf{P}\rho_{XY} = \partial_t \rho_1 = \mathbf{PL}\rho_1 + \mathbf{PL}g, \quad (2.1.11.6)$$

$$\partial_t \mathbf{Q}\rho_{XY} = \partial_t g = \mathbf{QL}\rho_1 + \mathbf{QL}g. \quad (2.1.11.в)$$

Уравнение (2.11.в) можно формально решить относительно g , рассматривая $\mathbf{QL}\rho_1$, как неоднородный член, и, подставив полученное решение в (2.1.11б), получить интегро-дифференциальное уравнение для ρ_1

$$\partial_t \rho_1(t) = \mathbf{PL}\rho_1(t) + \mathbf{PL} \int_0^t d\tau \exp\{\mathbf{QL}(t-\tau)\} \mathbf{QL}\rho_1(\tau) + \mathbf{PL} \exp(\mathbf{QL}t)g(0). \quad (2.1.11в)$$

Далее решение (2.1.11в) ищется на подпространстве функций $\mathbf{Q}f = 0$, то есть в (2.1.11в) $g(0) = 0$. Несмотря на наличие такого неприятного оператора, как \mathbf{QL} , уравнение (2.1.11в) замкнуто относительно функции распределения сокращенного описания $\mathbf{PQ}\rho_{XY}$. Решение этого уравнения при известном ρ_{red} приводит к уравнению для $\rho_Y(\mathbf{Y}, t)$ – кинетическому уравнению сокращенного описания эволюции полной системы, при этом существенно используется факт разделения временных масштабов в быстрой и медленной подсистемах ($\tau_X \ll \tau_Y$).

В частности этим методом можно получить уравнение Фоккера–Планка (которое будет использовано в дальнейшем). Однако такой вывод кинетических уравнений не является строгим, поскольку содержит в процедуре доказательства ряд положений, которые базируются на известных соотношениях для гамильтоновых систем и равновесной термодинамики. Исходные динамические уравнения (2.1.8) и (2.1.9), заведомо содержащие диссипативные члены, не относятся к

системам, равновесное состояние которых известно (распределение Гиббса). Поэтому определение ρ_{red} равносильно в данном случае решению исходных уравнений для функции распределения вероятностей полной системы (включающую быструю и медленную). В теории флуктуаций природных объектов у исследователя не остается иного выхода, как опираться на: 1) исходные уравнения баланса; 2) численные эксперименты с подробными моделями – проекцией реальных природных систем на множество численных алгоритмов моделирования эволюции природных объектов и 3) *разнородные* данные наблюдений. В этой ситуации метод проекционных операторов Мори более адекватен нашим целям (статистическое описание поведения природных объектов) и возможностям аппарата стохастических дифференциальных уравнений.

Метод проекционных операторов Мори. Отказ от рассмотрения индивидуальных траекторий в подпространстве быстрых переменных $\{X_\alpha\}$ означает, что они могут быть описаны только своими вероятностными характеристиками – статистическими моментами функции плотности распределения $\{X_\alpha\}$ – $\rho_S(\mathbf{X} | \mathbf{Y})$ при заданных значениях переменных $\{Y_i\}$, которые на данном шаге рассматриваются как внешние параметры. Для любой функции $F(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ определяется процедура условного осреднения

$$\langle F | \mathbf{Y} \rangle = \int F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rho_S(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) d\mathbf{X}. \quad (2.1.14)$$

Эта операция выполняется с функцией распределения вероятности, которая удовлетворяет стационарному уравнению Лиувилля для решений (2.1.9) при $\mathbf{Y} = \text{const}$:

$$\mathbf{L}_X \rho_S = -\partial_\alpha (u_\alpha \rho_S) = 0. \quad (2.1.15)$$

Сжатие описания достигается ценой отказа от точного задания начальных значений быстрых переменных при решении задачи Коши для (2.1.8), (2.1.9), так что начальное состояние можно задавать только статистически. Эволюция полной системы от начальных значений переменных $(\mathbf{X}(0), \mathbf{Y}(0))$ происходит под действием оператора эволюции \mathbf{M} , с помощью которого определяется значение любой фазовой функции $F(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ (в том числе любые X_α или Y_i) в произвольный момент времени t :

$$F(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) = e^{t\mathbf{M}} F(0), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_X + \mathbf{M}_Y = u_\alpha \partial_\alpha + U_i \partial_i. \quad (2.1.16)$$

В (2.1.16) после применения оператора $\exp(t\mathbf{M})$ к $F(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ следует положить $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X}(0), \mathbf{Y}(0))$, а операторную экспоненту можно рассчитывать путем формального разложения в ряд Тейлора.

Соотношение (2.1.16) вытекает из (2.1.8), (2.1.9), если заметить, что

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dX_\alpha}{dt} \partial_\alpha F + \frac{dY_i}{dt} \partial_i F = \mathbf{M}F. \quad (2.1.17)$$

При сжатии описания в методе Мори рассчитывается только эволюция медленных переменных, при этом максимально возможная информация о начальных условиях заключена в функции $\rho_S(\mathbf{X} | \mathbf{Y}(0))$. Зависимость фазовых функций от X -переменных, в том числе в начальный момент, учитывается только в проекции на подпространство медленных, задаваемой формулой (2.1.14). Вводится проекционный оператор Мори, действующий в пространстве начальных значений переменных исходной системы:

$$\mathbf{P} F = \iint d\mathbf{Y} d\mathbf{X} F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \delta(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}(0)) \rho_S(\mathbf{X} | \mathbf{Y}) = \langle F | \mathbf{Y}(0) \rangle, \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}. \quad (2.1.18)$$

Запись (2.1.18) в развернутом виде подчеркивает то, что операция (2.1.18) может быть определена в любой момент времени t , так что

$$e^{t\mathbf{M}} \mathbf{P} F(0) = e^{t\mathbf{M}} \langle F | \mathbf{Y}(0) \rangle = \langle F | \mathbf{Y}(t) \rangle. \quad (2.1.19)$$

При этом значения $\mathbf{Y}(t)$ являются точным решением исходной системы при произвольных начальных значениях быстрых и медленных переменных. Схематически сжатое описание эволюции системы в картине Мори изображено на рис. 2.1.2.

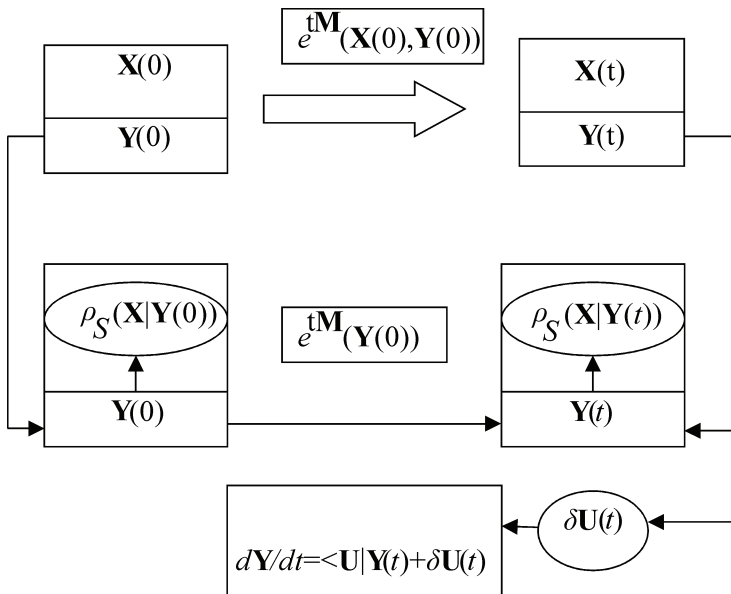


Рис. 2.1.2. Схема сжатого, огрубленного описания эволюции полной системы из начального состояния (верхний левый блок) под действием точного оператора эволюции к некоторому состоянию в момент времени t (верхний правый блок), которое соответствует эволюции от сжатого начального описания (нижний левый блок) к сжатому конечному (нижний правый блок). Переход от нижнего левого блока к правому нижнему блоку может осуществляться как с точным оператором эволюции, так и в виде решения стохастического уравнения со случайным добавочным членом δU .

При потере памяти о точных начальных значениях быстрой подсистемы в моделирующей поведение полной системы (см. (2.1.8), (2.1.9)) правая часть уравнения для медленных переменных приобретает дополнительную случайную составляющую ($\delta\mathbf{U}(t)$ на рис. 2.1.2). Через нее воздействие неучтенных членов может вызывать низкочастотный отклик в инерционной подсистеме. В следующем разделе будет рассмотрен вывод выражения для $\delta\mathbf{U}$ и приведение уравнений для медленных переменных к виду стохастических дифференциальных уравнений.

Здесь сделаем одно важное замечание относительно обозначений. Случайные добавочные члены (остаток после статистического осреднения произвольной переменной F) зачастую обозначают, как $F' = F - \langle F \rangle$. Такие обозначения приняты в теории турбулентности [Монин, Яглом, 1965, 1967]. В то же время в неравновесной статистической механике обозначение δF является более принятым. [Кайзер, 1990]. Далее в отдельных разделах мы будем использовать как один, так и другой тип обозначений исходя из принятых в литературе при описании конкретных процессов.

2.2. Уравнения Ланжевена для медленных переменных: общая теория и простой климатический пример

Любую фазовую функцию (под фазовой функцией понимается функция от траектории системы в фазовом пространстве) от быстрых и медленных переменных можно разбить на сумму двух слагаемых

$$F = \langle F | \mathbf{Y} \rangle + (F - \langle F | \mathbf{Y} \rangle) = \langle F | \mathbf{Y} \rangle + \delta F. \quad (2.2.1)$$

Это можно сделать и для правой части (2.1.8). Применяя (2.1.16) к правой части уравнения (2.1.8), для медленной переменной перепишем уравнение (2.1.8) в виде

$$\frac{dY_i}{dt} = e^{t\mathbf{M}} (\langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(0) \rangle + \delta\mathbf{U}(0)) = \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(t) \rangle + \delta\mathbf{U}(t). \quad (2.2.2)$$

Напомним, что оператор \mathbf{M} в технике Мори действует в пространстве начальных состояний $\{\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0\}$, хотя формально можно определить

$$\mathbf{M}F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \int d\mathbf{X}_0 d\mathbf{Y}_0 \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \delta(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0) \mathbf{M}F(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0).$$

В (2.2.2) используется свойство линейности оператора эволюции \mathbf{M} , действующего в пространстве начальных состояний. В (2.2.2) остаток $\delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y} \rangle$, который в первоначальной версии теории стохастических моделей климата К. Хассельмана рассматривается как дельта-коррелированный по времени случайный источник флуктуаций – «белый шум» – на самом деле не обязан быть равным нулю даже при осреднении по статистическому ансамблю начальных состояний. На характерных временах эволюции быстрой подсистемы τ_X он сохраняет память о корреляциях быстрых и медленных переменных. Для его преобразования применяется операторное тождество [Mori et al., 1980]

$$e^{t(\mathbf{A} + \mathbf{B})} = e^{t\mathbf{A}} + \int_0^t d\tau e^{(t-\tau)(\mathbf{A} + \mathbf{B})} \mathbf{B} e^{\tau\mathbf{A}}. \quad (2.2.3)$$

В справедливости тождества (2.2.3) можно убедиться простым дифференцированием по времени с учетом того, что при $t=0$ оно очевидно.

Применяя (2.2.3) ко второму слагаемому в (2.2.1) (при этом положив $\mathbf{B}=\mathbf{P}\mathbf{M}$, $\mathbf{A}=\mathbf{Q}\mathbf{M}$) и учитывая (2.1.19), для любой фазовой функции F , получаем разбиение на три слагаемых

$$F(t) = \langle F | \mathbf{Y}(t) \rangle + \int_0^t d\tau e^{(t-\tau)\mathbf{M}} \mathbf{P} \mathbf{M} e^{\tau\mathbf{Q}\mathbf{M}} \delta F(0) + e^{t\mathbf{Q}\mathbf{M}} \delta F(0). \quad (2.2.4)$$

В (2.2.4) операторы проецирования Мори \mathbf{P} и $\mathbf{Q}=\mathbf{1}-\mathbf{P}$ определены в предыдущем разделе. Подстановка (2.2.4) при $F=U_i$ в (2.1.8) превращает уравнение эволюции медленных переменных в *обобщенные уравнения Ланжевена* [Mori et al., 1980]

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(t) \rangle + \int_0^t d\tau e^{(t-\tau)\mathbf{M}} \mathbf{P} \mathbf{M} e^{\tau\mathbf{Q}\mathbf{M}} \delta \mathbf{U}(0) + e^{t\mathbf{Q}\mathbf{M}} \delta \mathbf{U}(0). \quad (2.2.5)$$

Разбиение правой части (2.2.5), полученное тождественными преобразованиями, есть перезапись (2.2.2) в виде, удобном для применения аппроксимаций исходя из априорных знаний или предположений о поведении решений исходной системы. Первое слагаемое – адаптированное к $\mathbf{Y}(t)$ квазистационарное (то есть при фиксированном $\mathbf{Y}(t)$) условное среднее значение скорости изменения медленных переменных. Последнее слагаемое – случайная сила, среднее от которой по любому распределению функции вероятностей начальных значений вида $\rho_{XY}(0) = \rho_Y(0) \rho_S(\mathbf{X}(0) | \mathbf{Y}(0))$ (ρ_S – стационарная плотность распределения быстрых переменных при фиксированных значениях медленных удовлетворяет (2.1.15)) равно нулю (поскольку $\mathbf{P}\mathbf{Q}=0$)

$$\langle e^{t\mathbf{Q}\mathbf{M}} \mathbf{Q} U_i | \mathbf{Y}(0) \rangle = \mathbf{P} e^{t\mathbf{Q}\mathbf{M}} \mathbf{Q} U_i = 0. \quad (2.2.6)$$

Второе слагаемое в (2.2.5) – интеграл памяти – описывает вклад конечности времени запаздывания среднестатистической реакции X-системы, оно зависит от t и значений $\mathbf{Y}(t \leq t)$, зависимость от $\mathbf{X}(0)$ в нем исчезает. Если $\tau_X = O(\mathbf{M}_X^{-1}) \ll \tau_Y = O(\mathbf{M}_Y^{-1})$, то $\mathbf{Q}\mathbf{M} = \mathbf{M}_X + \mathbf{Q}\mathbf{M}_Y = \mathbf{M}_X + O(\tau_X/\tau_Y)$, так как интегрированием по частям можно показать, что $\mathbf{P}\mathbf{M}_X = \int d\mathbf{X} \partial_\alpha (u_\alpha \rho_S f) - \int d\mathbf{X} f \partial_\alpha (u_\alpha \rho_S) = 0$. Первое слагаемое равно нулю в силу предположения о стремлении ρ_S на бесконечности к нулю достаточно быстро, второе – в силу (2.1.15). Поэтому выражения, содержащие $\exp(t\mathbf{Q}\mathbf{M})$,

при интегрировании по $\mathbf{X}(0)$ затухают на временах τ_X , корреляционная функция последнего слагаемого в (2.2.4), (2.2.5) при $t \gg \tau_X$ стремится к нулю, а интеграл памяти имеет порядок τ_X/τ_Y . При замене в интеграле памяти верхнего предела интегрирования на $t \rightarrow +\infty$, выражение (2.2.5) переходит в уравнение, формально не содержащее запаздывание [Mori et al., 1980],

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \langle \mathbf{U}_e | \mathbf{Y}(t) \rangle + \delta \hat{\mathbf{U}}(t), \quad (2.2.7)$$

$$\delta \hat{\mathbf{U}}(t) = e^{\tau \mathbf{QM}} \delta \mathbf{U}(0), \quad \langle \delta \hat{\mathbf{U}}(t) | \mathbf{Y}(0) \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{U}_e | \mathbf{Y}(t) \rangle = \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(t) \rangle + \int_0^{\infty} d\tau \langle \mathbf{M} \delta \hat{\mathbf{U}}(\tau) | \mathbf{Y}(t) \rangle. \quad (2.2.8)$$

Уравнение (2.2.7) и есть искомое уравнение Ланжевена – основное исходное уравнение теории броуновского движения. По форме оно напоминает первый вариант стохастических моделей климата К. Хассельманна (с заменой \mathbf{U} на \mathbf{U}_e). В линейном одномерном случае при возможности осуществления замены $\langle \mathbf{U}_e | \mathbf{Y}(t) \rangle = -\lambda \mathbf{Y}(t)$ выражение (2.2.7) превращается в привычное линейное уравнение Ланжевена – частный случай уравнения Ланжевена общего вида.

В теории броуновского движения [Mazo, 1978] наличие интеграла памяти приводит к возникновению макроскопического трения – это второй член справа в (2.2.8). Несмотря на то, что он имеет порядок $\tau_X/\tau_Y \ll 1$, в задаче о движении тяжелой молекулы в газе легких молекул только наличие этого члена приводит к достижению статистически стационарного состояния для тяжелой молекулы (частицы), поскольку, как можно показать из гамильтоновских уравнений движения, в этом случае первый член справа в (2.2.8) тождественно равен нулю.

Проиллюстрируем этот факт, а заодно и возможности метода проекционных операторов, на классической задаче о движении тяжелой молекулы массы M с координатой и скоростью \mathbf{R} и \mathbf{V} , взаимодействующей с газом из $N \gg 1$ легких молекул массы m , каждая из которых имеет координату и скорость m_i, v_i . Гамильтониан полной системы и оператор эволюции состоят из суммы трех слагаемых

$$\mathbf{H} = \frac{M\mathbf{V}^2}{2} + \sum_i \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} + U(\mathbf{R}, \mathbf{r}^N), \quad \mathbf{M} = \mathbf{V} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\mathbf{F}}{M} \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} + \mathbf{M}_0,$$

где

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}}, \quad \mathbf{f}_i = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \mathbf{M}_0 = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_i} + \sum_i \frac{\mathbf{f}_i}{m} \frac{\partial}{\partial v_i},$$

а равновесная функция распределения задает проекционный оператор Мори

$$\mathbf{P}\mathbf{F} = \int \rho_0 \mathbf{F} d p^N d r^N, \quad \rho_0 = \frac{1}{Z_0} \exp(-\mathbf{H}_0 / k_B T).$$

Выражение (2.2.5) для скорости броуновской частицы, согласно второму закону Ньютона, переписывается в виде

$$M \frac{d\mathbf{V}}{dt} = M e^{\mathbf{M}t} \mathbf{P}\mathbf{M}\mathbf{V}(0) + \mathbf{F}^+(t) + \int_0^t d\tau \exp(\mathbf{M}(t-\tau)) \mathbf{P}\mathbf{M}(\mathbf{F}^+(\tau)). \quad (2.2.5a)$$

В (2.2.5a) $\mathbf{F}^+(t)$ – случайная сила, среднее от которой по равновесному начальному распределению равно нулю:

$$\mathbf{F}^+(t) = M \exp(\mathbf{Q}\mathbf{M}t) \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{V}(0), \quad \mathbf{P}\mathbf{F}^+(t) = \langle \mathbf{F}^+(t) \rangle_{eq} = 0. \quad (2.2.5b)$$

Можно показать, что первый член справа в (2.2.5a) есть средняя равновесная сила, действующая на тяжелую молекулу со стороны легких и равная нулю. Далее делается традиционное приближение [Mazo, 1978], которое заключается в том, что в стоящих после оператора \mathbf{P} (который содержит осреднение по быстрым движениям) операторах, содержащих $\mathbf{Q}\mathbf{M}_0$ (этот оператор входит в \mathbf{F}^+), он заменяется на \mathbf{M}_0 , поскольку $\tau_m = O(\mathbf{M}_0^{-1}) \ll \tau_M = O(\mathbf{M}_M^{-1})$ (здесь нижние индексы 0 и M относятся к операторам легких молекул и броуновской частицы соответственно). Это приближение опирается на оценку $\mathbf{Q}\mathbf{M} = \mathbf{M}_0 + \mathbf{Q}\mathbf{M}_M = \mathbf{M}_0 + O(\tau_m / \tau_M) = \mathbf{M}_0 + O(m/M) \approx \mathbf{M}_0$. Последняя оценка следует из вида гамильтониана полной системы \mathbf{H} и гипотезы о равномерном распределении кинетической энергии по степеням свободы. Используя это свойство несколько раз, окончательно приводим уравнение (2.2.5a) к виду [Mazo, 1978]

$$\begin{aligned} M \frac{d\mathbf{V}(t)}{dt} &= \mathbf{F}^+(t) - \frac{1}{k_B T} \int_0^t d\tau \mathbf{V}(t-\tau) \langle \mathbf{F}(0)\mathbf{F}(\tau) \rangle \approx \\ &\int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{F}(0)\mathbf{F}(\tau) \rangle \\ &\approx -\frac{0}{k_B T} \mathbf{V}(t) + \mathbf{F}^+(t). \end{aligned} \quad (2.2.5b)$$

Это и есть классическое линейное уравнение Ланжевена, полученное методом проекционных операторов. Уравнение (2.2.5b) содержит флуктуационно-диссипативное соотношение – пропорциональность коэффициента трения интегралу от корреляционной функции случайных воздействий. Дело в том, что ядро интеграла памяти в (2.2.5b) – корреляционная функция силы \mathbf{F} – содержит осреднение по быстрым переменным и согласно принятому ранее традиционному приближению, совпадает с корреляционной функцией случайной силы \mathbf{F}^+ .

В стохастических дифференциальных уравнениях природных объектов статистически стационарное состояние достигается за счет включения отрицательных обратных связей, содержащихся в $\langle \mathbf{U} | \mathbf{Y} \rangle$. Простейшим примером такой отрицательной обратной связи является линейная: $\langle \mathbf{U} | \mathbf{Y} \rangle = -\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{U}$, при этом собственные числа матрицы обратных связей $\mathbf{\Lambda}$ являются положительными. Поэтому на данном этапе (эта глава и следующая) в качестве исходного уравнения Ланжевена можно рассматривать более привычное уравнение (2.2.2), отвлекаясь от эффектов памяти.

Проиллюстрируем роль случайных сил и отрицательных обратных связей на простом геофизическом примере, который позволяет понять, каким образом стохастические дифференциальные уравнения применяются к описанию флуктуаций природных объектов. Рассмотрим простейшую так называемую «нульмерную» энергобалансовую модель климата [Будыко, 1974; Golitsyn, 1983; Dickinson, 1981], в основе которой лежит уравнение энергетического баланса вертикального столба, проходящего через атмосферу и деятельный слой суши или океана и осредненного по поверхности теплоизолированной с боковых границ области (полушарию или всего земного шара). В этом уравнении предполагается, что теплосодержание, как принято в простых энергобалансовых моделях, параметризуется через эффективную теплоемкость C и эффективную температуру поверхности T_S . Изменение теплосодержания определяется притоком тепла через границы – в данном случае благодаря использованию понятия деятельного слоя только через внешнюю границу атмосферы. Таким образом,

$$C \frac{dT_S}{dt} = R_\Sigma = \frac{I_0}{4} (1 - \alpha_\Sigma) - F_\uparrow. \quad (2.2.9)$$

Правая часть (2.2.9) R_Σ – горизонтально осредненный радиационный баланс на верхней границе атмосферы – складывается из усвоенной приходящей солнечной радиации ($\frac{I_0}{4} = 342 \text{ Вт/м}^2$ – средняя по Земному шару инсоляция (I_0 – солнечная постоянная), α_Σ – интегральное альбедо) и уходящего в космос теплового излучения F_\uparrow . Введем в рассмотрение среднее климатическое значение температуры $\langle T_S \rangle$, такое, что $C \frac{d\langle T_S \rangle}{dt} = \frac{I_0}{4} (1 - \alpha_\Sigma) - \langle F_\uparrow \rangle$. Теперь можно получить выражение, описывающее вариации во времени малых отклонений $\Delta T_S = (T_S - \langle T_S \rangle)$ в следующем виде:

$$C \frac{d\Delta T_S}{dt} = -\Delta F_\uparrow - \frac{I_0}{4} \Delta \alpha_\Sigma.$$

Перепишем его в виде уравнения Ланжевена, пренебрегая эффектами запаздывания и обозначая короткопериодные синоптические флуктуации переменных верхним штрихом:

$$C \frac{d\Delta T_S}{dt} = -\langle \Delta F_{\uparrow} | \Delta T_S \rangle - \frac{I_0}{4} \langle \Delta \alpha_{\Sigma} | \Delta T_S \rangle + R_{\Sigma}' . \quad (2.2.10)$$

Здесь правая часть записана относительно малых отклонений от среднего стационарного значения T_S с выделением адаптированных к ΔT_S медленных изменений потока уходящего в космос теплового излучения $\langle \Delta F_{\uparrow} | \Delta T_S \rangle$, альбедо $\langle \Delta \alpha_{\Sigma} | \Delta T_S \rangle$ и короткопериодных флуктуаций (синоптического масштаба) радиационного баланса R_{Σ}' .

Уравнение (2.2.10) есть аналог (2.2.7) без интеграла памяти.

Известно, что после осреднения по быстропротекающим синоптическим процессам в атмосфере уходящую в космос длинноволновую радиацию можно рассчитать по формуле [Будыко, 1974]: $\langle F_{\uparrow} | T_S \rangle = A + BT_S$, так что

$$\langle F_{\uparrow} | \Delta T_S \rangle = A + B\Delta T_S . \quad (2.2.11)$$

Если учесть зависимость альбедо от температуры (генетически связанную с изменением отражательных свойств Земного шара или полушария при вариациях площади снежного покрова), представить ее в виде разложения в ряд Тейлора и ограничиться первым членом разложения, то в (2.2.10) появится еще одно линейное слагаемое, зависящее от температуры. Можно и далее расширять перечень действующих обратных связей, добавляя в B соответствующие слагаемые, то есть $B \rightarrow B + 0,25I_0 da/dT + \dots$ [Голицын, Демченко, 1980; Кислов, 2001], но в рамках рассматриваемой простой модели такое усложнение задачи не приведет к улучшению результатов. Таким образом, с учетом сделанных замечаний, уравнение (2.2.10) преобразуется к виду классического линейного уравнения Ланжевена

$$C \frac{d\Delta T_S}{dt} = -B\Delta T_S + R_{\Sigma}'(t), \quad (2.2.12)$$

или

$$\frac{d\Delta T_S}{dt} = -\frac{1}{\tau_T} \Delta T_S + f(t), \quad \tau_T = \frac{C}{B} = \frac{1}{\lambda_T}, \quad f = \frac{R_{\Sigma}'}{C}. \quad (2.2.13)$$

В уравнении (2.2.13) $\lambda_T = B/C$ – параметр, обратный $\tau_T = \frac{C}{B}$ (времени релаксации медленной переменной) – имеет размерность частоты и во многих работах по исследованию флуктуаций в природных объектах используется в качестве параметра отрицательной обратной связи при сопоставлении теоретически рассчитанных спектров флуктуаций с данными наблюдений за природ-

ными объектами. Параметр отрицательной обратной связи (в данном случае из-за излучения тепловой радиации в космос) может быть вычислен по аналитическим, эмпирическим, полуэмпирическим и численным моделям переноса электромагнитного излучения, не зависящим от стохастических моделей поведения потоков излучения. Инерционность медленной переменной (параметр C) можно рассчитывать исходя из физической модели исследуемого процесса теплонакопления. В этой связи авторы разделили разные формы записи стохастического дифференциального уравнения для медленной переменной: уравнения (2.2.12) и (2.2.13). Первое содержит аппроксимацию исходных соотношений энергетического баланса с соблюдением закона сохранения энергии. Для исследуемых далее природных объектов эта форма записи стохастических уравнений будет основной. Однако для получения аналитических результатов форма (2.2.13) более удобна по причине ее традиционности.

Возможность разделения процессов на быстрые и медленные содержится в уравнении (2.2.13), в котором явным образом входит время τ_T . Для оценки этой величины требуется знать численные значения констант B и C . Оценки первой величины в целом лежат в окрестности $B=2,0$ Вт/Км² [Агаян и др., 1985; Мохов, 1981]. Оценки C колеблются в пределах от 2 до $0,4 \cdot 10^8$ Дж/м²К [Демченко, 1982]. При таких C и B время τ_T (около года или нескольких лет)

существенно превышает время корреляции синоптической изменчивости в атмосфере (несколько суток). Для дальнейших расчетов примем теплоемкость $C=2 \cdot 10^8$ Дж/м²К. Она соответствует теплоемкости верхнего квазиоднородного слоя океана (см. раздел 3.1) с учетом доли суши в Северном полушарии. Помимо синоптической изменчивости в атмосфере существуют процессы и с большими временными масштабами. Здесь мы ограничиваемся расчетом межгодовой изменчивости, беря в качестве ланжевенковского источника синоптическую изменчивость. При учете только последней не составляет принципиальных трудностей включение сезонного хода как в определение интенсивности источников, так и в детерминированную составляющую правой части уравнения (2.1.12) при расчете долгопериодной изменчивости температуры.

Тогда на временах изменений температуры флуктуации радиационного баланса δR_Σ и соответствующую им случайную силу f в (2.2.13) можно рассматривать как дельта-коррелированный по времени случайный процесс – белый шум с корреляционной функцией [Кляцкин, 1980]:

$$K_f(\tau) = \langle f(t+\tau)f(t) \rangle = 2D_f \delta(\tau). \quad (2.2.14)$$

Коэффициент D_f рассчитывается из интегрального соотношения

$$D_f = \int_0^{+\infty} K_f(\tau) d\tau = \sigma_f^2 \tau_f, \quad (2.2.15)$$

где σ_f^2 – дисперсия процесса f , τ_f – его время корреляции. Здесь имеется в виду интегральное время корреляции, определяемое по формуле (2.2.15). Для экспоненциально спадающей по времени корреляционной функции оно соответствует уменьшению последней в e раз. Для времени корреляции можно принять рекомендованную оценку $\tau_f = 3$ сут [Leith, 1975]. Коэффициент D_f традиционно называется коэффициентом диффузии, само решение (2.2.13) представляет собой одномерный процесс Орнштейна–Уленбека, который относится к классу диффузионных случайных процессов [Рытов, 1976; Гардинер, 1986]. Корреляционная функция такого процесса экспоненциально спадает с характерным временем τ_T : $K_T(\tau > 0) = \sigma_T^2 \exp(-\tau/\tau_T) = K_T(-\tau)$. Эту функцию также называют автокорреляционной, ей соответствует спектральная плотность

$$S_{T\omega}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} K_T(\tau) \cos(\omega\tau) d\omega = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_T^2 \tau_T}{1 + (\omega\tau_T)^2} = \frac{2}{\pi} \frac{D_f}{\lambda_T^2 + \omega^2}. \quad (2.2.16)$$

Характерная особенность данного выражения состоит в том, что при $\omega \gg \lambda_T$, когда не сказывается стабилизирующее влияние отрицательной обратной связи, она растет обратно пропорционально квадрату частоты при стремлении последней к нулю, что соответствует спектру нестационарного случайного процесса, возникающему при накоплении воздействий случайных флуктуаций разных знаков. Это так называемый «красный шум». Однако на малых частотах, там, где $\omega \ll \lambda_T$ спектр (2.2.16) выходит на плато, как спектр белого шума (константа). Таким образом по характерной частоте перегиба спектра можно судить о параметре обратной связи.

Отметим, что в (2.2.16) используется спектральная плотность по положительным частотам, которая вдвое превышает часто используемую спектральную плотность, заданную во всем диапазоне частот с заменой в первом равенстве (2.2.16) нижнего предела интегрирования на минус бесконечность и под интегралом $\sigma_T^2 \cos(\omega\tau)$ на $1/4 \exp(-i\omega\tau)$. Использование такого определения спектральной плотности более удобно для того, чтобы спектр задавал распределение дисперсии σ_T^2 – энергии флуктуаций – по положительным частотам [Монин, Яглом, 1967]:

$$\sigma_T^2 = \int_0^{+\infty} S_{T\omega}(\omega) d\omega = \frac{D_f}{BC} = \frac{\sigma_{R\Sigma}^2 \tau_f}{BC} = \frac{\sigma_{R\Sigma}^2}{B^2} \frac{\tau_f}{\tau_T}. \quad (2.2.17)$$

Теперь, зная B и C , для оценки низкочастотной (межгодовой) хаотической составляющей изменчивости среднеглобальной или среднеполушарной температуры поверхности нам необходимо знание характеристик синоптической изменчивости радиационного баланса на верхней границе атмосферы. По результатам обработки спутниковых данных о компонентах радиационного баланса [Hartmann, Short, 1980] в среднем за год осредненная по Северному полушарию оценка стандартного отклонения локальных синоптических флуктуаций радиационного баланса на верхней границе атмосферы составляет: $\sigma_{R0} = 40 \text{ Вт/м}^2$ [Демченко, 1982].

Несмотря на то, что оценка базируется на данных измерений, полученных на заре эпохи спутниковой климатологии радиационного баланса, ее величина представляется надежной, поскольку речь идет о среднегодовых и среднеполушарных значениях. Гораздо более современные данные представлены короткими рядами (см., например, Standard deviation of monthly 1x1 averaged over globe. (CERES data from March 2000 through Feb.2004, averaged through all months), по которым трудно сделать надежные статистические оценки.

Дисперсию полушарно осредненной величины $\sigma_{R\Sigma}$ можно грубо оценить в предположении, что поле локальных флуктуаций R_Σ является статистически однородным на сфере [Демченко, 1980, 1982, 1983]. В случае, если радиус корреляции этого поля r_k мал по сравнению с радиусом Земли a , опираясь на идеи А.М. Обухова [Обухов, 1947], можно показать, что

$$\sigma_{R\Sigma}^2 \approx \sigma_{R0}^2 k_r \frac{r_k^2}{a^2}. \quad (2.2.18)$$

Коэффициент k_r зависит от нормированной пространственной корреляционной функции углового расстояния между точками на сфере. В дальнейшем здесь примем значение $k_r = 2/\pi$ (аппроксимация пространственной корреляционной функции в виде: $\rho(r) = \exp(-\alpha r^2)$). Для времени и радиуса корреляции можно принять эмпирическую оценку $r_k \approx 1000$ км, характеризующую масштабы пространственной корреляции погодной изменчивости [Гандин, Каган, 1976], $\tau_f = 3$ сут [Leith, 1975].

По сути уравнение (2.2.18) есть следствие *закона больших чисел* и выражает этот закон для дисперсии суммы каких-либо характеристик статистически независимых объектов (площадь каждого пропорциональна r_k^2) при общей площади, пропорциональной a^2 , и известной дисперсии флуктуаций этой характеристики в каждой независимой площадке.

Подставляя (2.2.18) в (2.2.17), можно получить оценки стандартного отклонения межгодовых флуктуаций среднеполушарной температуры (с учетом сглаживания по периоду 1 год), вызванных описанным «броуновским механизмом». В зависимости от выбранного значения теплоемкости эти оценки лежат в пределах $\sigma_T = 0,12 \text{ К} \div 0,25 \text{ К}$. Эти значения сравнимы с эмпирическими оценками по данным инструментальных наблюдений [Braganza et al., 2003] $\sigma_T = 0,15 \div 0,24 \text{ К}$ (нижняя граница интервала относится к оценке с исключенным трендом).

Разумеется, помимо рассмотренного в данном разделе механизма генерации флуктуаций инерционных элементов, в климатической системе Земли присутствуют и иные механизмы. Для нас важно, однако, что стохастические дифференциальные уравнения, полученные из первых принципов, предназначенные для расчета характеристики шумов по физическим моделям, позволили получить весьма близкие к реальности значения.

2.3. Плотность вероятностей флуктуаций: уравнение Фоккера–Планка и пример применения к расчету спектра нелинейного природного объекта

Простая энергобалансовая модель флуктуаций планетарно осредненной температуры поверхности, рассмотренная в предыдущем разделе, допускает статистическое описание в рамках линейного стохастического дифференциального уравнения. И в многомерном случае можно получить аналитические выражения для спектров и корреляционных функций в виде решения таких уравнений. В случае, если уравнения Ланжевена (2.2.2) или (2.2.7) не линейны (что часто имеет место для природных процессов), необходимо находить такие характеристики процесса, как плотность распределения вероятностей (включая и многовременные). В общем случае решение нелинейной многомерной системы

$$\frac{dZ_i(t)}{dt} = F_i(\mathbf{Z}(t)) + f_i(t), \quad \langle f_i(t+\tau)f_j(t) \rangle = 2D_{ij}\delta(\tau) \quad (2.3.1)$$

является марковским случайным процессом. Здесь и далее мы для простоты не будем учитывать зависимость \mathbf{F} от времени t и тензора коэффициентов диффузии \mathbf{D} – от \mathbf{Z} . Марковским процессом называется процесс «без последствия», для которого условная плотность распределения вероятностей в момент времени t_n полностью определяется его значением в любой предшествующий момент времени $t < t_n$

$$p_n(\mathbf{Z}_n, t_n | \mathbf{Z}_{n-1}, t_{n-1}, \dots, \mathbf{Z}_0, t_0) = p_{21}(\mathbf{Z}_n, t_n | \mathbf{Z}_{n-1}, t_{n-1}), \quad (t_n \geq t_{n-1} \geq \dots \geq t_0). \quad (2.3.2)$$

В (2.3.2) p_{21} – плотность вероятностей перехода, то есть условная вероятность того, что в момент t_2 значение изучаемой случайной функции равно \mathbf{Z}_2 , при условии, что в предшествующей момент времени t_1 оно равнялось \mathbf{Z}_1 . Зная ее и одноточечную плотность распределения вероятности $\rho_Z(\mathbf{Z})$ в статистически стационарном случае можно определить, например, временную корреляционную функцию. В одномерном случае $K_Z(\tau) = \langle z(t+\tau)z(t) \rangle$

$$K_Z(\tau) = \iint dz dz_0 z z_0 \rho_Z(z, t + \tau; z_0, t) = \iint dz dz_0 p_{21}(z, \tau | z_0, 0) \rho_Z(z_0) z z_0, \quad (2.3.3)$$

где $\rho_Z(z, t + \tau; z_0, t)$ – двухточечная плотность распределения вероятностей.

Если случайные силы в (2.3.1) можно считать гауссовым случайным процессом, то одноточечную плотность распределения вероятностей и плотность вероятностей перехода можно определить из уравнения Фоккера–Планка – кинетического уравнения для плотности распределения вероятностей решения уравнений (2.3.1). Здесь мы изложим метод, который базируется на осреднении индикаторной функции $\varphi_Z = \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z})$ по всем возможным траекториям $\mathbf{Z}(t)$, то есть статистическом усреднении уравнения для индикаторной функции [Кляцкин, 1980] (см. далее уравнение (2.3.5)). Ее осреднением определяется искомая плотность распределения вероятностей $\rho(\mathbf{Z}, t) = \langle \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}) \rangle$. В отличие от уравнения Лиувилля в (2.3.5) входит произведение индикаторной функции на случайную силу $\mathbf{f}(t)$. Расщепление корреляций такого рода базируется на теореме Новикова [Новиков, 1964] для функционала $R[\mathbf{f}]$ от дельта-коррелированного гауссового случайного процесса $\mathbf{f}(t)$

$$\langle R[\mathbf{f}] f_i(t) \rangle = \int_0^t ds \langle \frac{\delta R[\mathbf{f}]}{\delta f_j(s)} \rangle \langle f_i(t) f_j(s) \rangle = D_{ij} \langle \frac{\delta R}{\delta f_j(t)} \rangle. \quad (2.3.4)$$

В (2.3.4) D_{ij} – тензор коэффициентов диффузии (см. (2.3.1)).

В (2.3.4) вариационная производная функционала R по переменной $f_j(t)$ есть аналог частной производной для случая, когда независимая переменная $f_j(t)$ сама является функцией (здесь – времени), а R зависит от поведения \mathbf{f} во все моменты времени. В общем случае вариационная производная от произвольного функционала $F[u]$ по полю $u(\mathbf{x}_0)$ в точке \mathbf{x}_0 (\mathbf{x} – вектор) определяется соотношением [Рытов и др., 1978]:

$$\frac{\delta F[u]}{\delta u(\mathbf{x}_0)} = \lim_{\Delta \mathbf{x}} \frac{F[u + \delta u] - F[u]}{\int \delta u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}, \text{ при } |\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0, \max[\delta u] \rightarrow 0.$$

Надо отметить, что изложенный далее метод получения уравнения для плотности вероятности переменной \mathbf{Z} – кинетического уравнения Фоккера–Планка не является единственным. В частности, его можно получить методом проекционных операторов Мори [Mori et al., 1980] из исходной динамической системы. Интересен вывод уравнения Фоккера–Планка методом интегралов по траекториям [Chernyak et al., 2006]. Последний метод также как и метод Кляцкина, базируется на исходных уравнениях Ланжевена.

Уравнение для индикаторной функции $\varphi_{\mathbf{Z}} = \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z})$ можно получить из (2.3.1), как и ранее при выводе уравнения (2.1.12) воспользовавшись тем, что $\partial\varphi_{\mathbf{Z}}/\partial\mathbf{Z}(t) = -\partial\varphi_{\mathbf{Z}}/\partial\mathbf{Z}$,

$$\partial_t \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}) + \partial_i (V_i(\mathbf{Z})\delta(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}(t))) = -\partial_i (\delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z})f_i(t)). \quad (2.3.5)$$

После осреднения при отсутствии в правой части случайной силы \mathbf{f} выражение (2.3.5) превращается в уравнение Лиувилля (по аналогии с (2.1.4)). Для осреднения правой части уравнения (2.3.5) используем теорему Новикова (2.3.4) и правило взятия вариационной производной [Кляцкин, 1980]

$$\begin{aligned} \langle \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z})f_i(t) \rangle &= D_{ij} \langle -\partial_k \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}) \frac{\delta}{\delta f_j(t)} Z_k(t) \rangle = D_{ij} \partial_k \langle \delta(\mathbf{Z}(t) - \mathbf{Z}) \delta_{jk} \rangle = \\ &= D_{ij} \partial_j \rho_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, t). \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

После осреднения (2.3.5) с помощью (2.3.6) получаем уравнение Фоккера–Планка для одноточечной плотности распределения вероятностей $\rho_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, t)$

$$\partial_t \rho_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, t) = -\partial_i (V_i(\mathbf{Z}, t)\rho_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, t)) + \partial_i D_{ij} \partial_j \rho_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, t) = \mathbf{L}_{FP} \rho_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, t). \quad (2.3.7)$$

При выводе (2.3.7) здесь для простоты не учтена зависимость интенсивности случайных сил \mathbf{f} от зависимых переменных \mathbf{Z} , хотя в принципе можно считать \mathbf{D} в (2.3.7) функцией \mathbf{Z} . В (2.3.7) введен так называемый кинетический оператор Фоккера–Планка $\mathbf{L}_{FP} = -\partial_i F_i + \partial_i D_{ij}$, которому соответству-

ет сопряженный $\mathbf{L}_{FP}^+ = +\partial_i F_i + \partial_i D_{ij}$. Решение (2.3.7) с начальным условием

$\rho_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}, t=0) = \delta(\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_0)$ соответствует плотности вероятности перехода в

формуле (2.3.3) для корреляционной функции. В дальнейшем нам зависимость \mathbf{D} от \mathbf{Z} не понадобится (тогда коэффициенты диффузии D_{ij} можно в

(2.3.7) вынести из под знака дифференцирования). В различных монографиях по неравновесной статистической механике и теории диффузионных случайных процессов формы записи уравнения Фоккера–Планка несколько отличаются. Мы пользуемся формой записи (2.3.7) [Mori et al., 1980], ее можно получить методом проекционных операторов из исходной динамической системы (2.1.8), (2.1.9). Однако она отличается от той, которая принята в некото-

рых других монографиях [Кляцкин, 1980; Свешников, 1968 и т.д.]. Запись уравнения Фоккера–Планка в виде (2.3.7) по форме соответствует уравнению сохранения «потока вероятности» \mathbf{J}_ρ

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}_\rho, \quad J_i = V_i \rho - D_{ij} \partial_j \rho. \quad (2.3.8)$$

Во всех монографиях, посвященных применению уравнения Фоккера–Планка, оно имеет дивергентный вид (2.3.8) с отличием в форме записи потока вероятности. При формальном математическом выводе из уравнения Ланжевена уравнения Фоккера–Планка точным является вывод, данный с помощью метода вариационных производных [Кляцкин, 1980] при гипотезе о гауссовости случайных, дельта-коррелированных по времени сил. Вывод из уравнения Чепмена–Колмогорова [Свешников, 1968] для непрерывного случайного процесса также является строгим. Однако при постоянстве тензора коэффициентов диффузии \mathbf{D} форма записи уравнения Фоккера–Планка не сказывается на проведении дальнейших расчетов.

Приведем пример применения уравнения Фоккера–Планка для расчета времени корреляции нелинейного случайного процесса – флуктуаций влагозапаса почвы W – количества влаги, которое содержится в верхнем слое почвы единичного сечения. Подробный анализ вопросов применения стохастических дифференциальных уравнений для расчета флуктуаций W дан в разделе (3.5), посвященном динамике увлажнения континентов. В разделе (3.5) дан вывод уравнения линейного уравнения Ланжевена для W (3.5.3). При этом отмечается, что главный вклад в отрицательную обратную связь дает зависимость испарения с поверхности суши от влагозапаса в деятельном метровом слое почвы (в бес-снежный период). Испарение дается выражением $E = E_0 \frac{W}{W_k}$, где E_0 – потен-

циальная испаряемость (равная испарению с водной поверхности при тех же атмосферных условиях), W_k – некоторое критическое по испарению значение влагозапаса деятельного слоя почвы. В основном уравнении интегрального баланса влаги в деятельном слое почвы (3.5.1) пренебрегается нелинейным процессом формирования поверхностного стока R , который можно представить в виде

$$R = \lambda_c H(W - W_c), \quad (2.3.9)$$

через функцию Хэвисайда [$H(x < 0) = 0$, $H(x \geq 0) = 1$] и λ_c – скорость релаксации W к критическому значению W_c за счет стока. Вместе с тем в (3.5.1) и (3.5.3) учитывается процесс вертикальной фильтрации влаги в почве за счет капиллярной влагопроводности с соответствующей параметризацией потока $F_H = D(W - W_d)$ через эмпирический коэффициент D и влажность нижних горизонтов W_d . Параметризация поверхностного стока (2.3.9) полностью соответствует его параметризации в модели (3.5.1).

В пренебрежении нелинейным процессом формирования поверхностного стока в разумных приближениях уравнение для флуктуаций W становится линейным уравнением Ланжевена (уравнение 3.5.3), в котором роль случайных сил в основном играют флуктуации осадков синоптического масштаба. Коэффициент линейной отрицательной обратной связи $\lambda_E = 1/\tau_E = E_0/W_k$ зависит от потенциальной испаряемости E_0 и критического влагозапаса W_k . Как показали численные эксперименты со стохастическим уравнением для флуктуаций влагозапаса, проведенные методом Монте-Карло [Delworth, Manabe, 1988], корреляционная функция флуктуаций W экспоненциально спадает с характерным временем затухания τ_W . Однако зависимость τ_W от условий испарения немонотонна. В режиме недостаточного увлажнения, когда средние осадки $\langle P \rangle$ существенно меньше E_0 , время корреляции $\tau_W = \tau_E \sim 1/E_0$ и с уменьшением E_0 увеличивается. Ситуация меняется вблизи $E_0 \sim \langle P \rangle$, далее с уменьшением E_0 время корреляции τ_W начинает быстро спадать. Это соответствует режиму достаточного увлажнения и переувлажнения, когда нелинейным стоковым членом (2.3.9) в уравнении для флуктуаций влагозапаса уже пренебрегать нельзя.

Рассмотрим нелинейное стохастическое уравнение флуктуаций влагозапаса почвы, которое можно записать в виде [Демченко, 1990, 2003]

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial W} + f_W(t), \quad \langle f_W(t+\tau)f_W(t) \rangle = 2D_W\delta(\tau) \quad , \quad (2.3.10)$$

$$U(W) = \frac{1}{2\tau_E}(W - W_E)^2 + \lambda_c(W - W_0)H(W - W_0) \quad ,$$

где λ_c характеризует скорость релаксации влагозапаса к критическому за счет стока по параметризации (2.3.9). Система уравнений (2.3.10) полностью соответствует уравнению (3.5.1) с заменой $\langle P \rangle \rightarrow \langle P \rangle + DW_d$ и $1/\tau_E \rightarrow 1/\tau_E + D$.

В (2.3.10) введено обозначение $W_E = W_0 \langle P \rangle / E_0$ и предполагается, что $W_c = W_k = W_0$. В исследованиях почвенной влаги часто применяется зависимость $W_k = 0,75 W_c$, однако в рассматриваемой задаче это лишь несколько усложняет вид потенциала в (2.3.10), не приводя к качественным изменениям результатов. Нашей задачей далее в этом разделе будет анализ влияния нелинейности, появившейся за счет включения в уравнение поверхностного стока, на корреляционную функцию происходящих на постоянном во времени кли-

матическом фоне флуктуаций малых отклонений $\Delta W = W - \langle W \rangle$. Для этого будет использована техника вычислений, которая базируется на нелинейном уравнении Фоккера–Планка вида (2.3.7) для одномерного уравнения Ланжевена (2.3.10).

Уравнение Ланжевена для влагозапаса почвы (2.3.10) является частным случаем многомерного уравнения (2.3.1). Ему соответствует одномерное уравнение Фоккера–Планка для $\rho_W(W, t)$ – частный случай многомерного уравнения (2.3.7):

$$\frac{\partial \rho_W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial W} \left(\rho_W \frac{\partial U}{\partial W} \right) + D_W \frac{\partial^2 \rho_W}{\partial W^2} = \mathbf{L}_{FP} \rho_W = 0. \quad (2.3.11)$$

В (2.3.11) одномерный оператор Фоккера–Планка \mathbf{L}_{FP} также является частным случаем многомерного аналога в (2.3.7).

Рассматривая динамику влажности почвы в регионах с достаточным и повышенным увлажнением будем формально считать $\rho_W(W, t)$ заданным на всей оси W $(-\infty, +\infty)$, что, как показали наши детальные расчеты по методу Монте-Карло [Демченко, 1990, 2003], не приводит к значительным погрешностям при определении статистических характеристик флуктуаций в области параметров задачи, характерных для современного климата. В статистически стационарном случае заданное на всей числовой оси решение одномерного уравнения Фоккера–Планка (например, уравнения (2.3.11) при $\partial_t = 0$) имеет решением аналог распределения Больцмана в статистической физике: $\rho_{WS}(W) = N \exp(-U/D_W)$ [Кляцкин, 1980; Гардинер, 1986] и в нашем случае

$$\begin{aligned} \rho_W(W, \lambda_c) &= C \exp\left(-\frac{U}{D_W}\right) = \\ &= C \exp\left[-\frac{(W - W_E)^2}{2D_E}\right] \exp\left[-\frac{\lambda_c}{D_W}(W - W_0)H(W - W_0)\right]. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

В (2.3.12) C – нормировочная константа (интеграл от плотности распределения вероятностей равен единице), $D_E = D_W \tau_E$ – дисперсия W в режиме недостаточного увлажнения.

Далее для получения аналитических результатов рассмотрим предельный случай «мгновенного» сброса избыточной влаги в сток при достижении критического влагозапаса и продолжении положительного поступления влаги в почву – так называемую «модель ведра» [Delworth, Manabe, 1988]. В этой модели среднее от любой функции от W можно вычислить с помощью (2.3.12) и затем перейти к пределу при $\lambda_c \rightarrow \infty$. Для вычисления характеристик флуктуаций влагозапаса в квазиравновесном приближении используется стацио-

нарная плотность распределения вероятностей (2.3.12). Если интересующие нас функции не имеют особенностей вблизи W_0 , то, благодаря наличию в (2.3.12) «обрезающей» экспоненты, для вычисления средних при $\lambda_c \rightarrow \infty$ достаточно рассматривать диапазон $W \leq W_0$) с плотностью распределения вероятности

$$\rho_{WS} = C \exp\left[-\frac{1}{2D_E}(W - W_E)^2\right]. \quad (2.3.13)$$

Вводится важный безразмерный параметр [Демченко, 1990, 2003]

$$\Pi_R = \left(\frac{\langle P \rangle}{E_0} - 1\right) \left(\frac{W_0 E_0}{2D_W}\right)^{1/2} = (W_E - W_0)(2D_E)^{-1/2}. \quad (2.3.14)$$

Параметр Π_R – основной критерий подобия модели – меняет знак при смене режима увлажнения с недостаточного на избыточный и остается инвариантным при некоторых преобразованиях величин внешних параметров: W_0 , E_0 , $\langle P \rangle$ и D_W . Далее можно получить аналитические выражения для интересующих нас характеристик флуктуаций [Демченко 1990]. Например, для среднего влагозапаса справедливо

$$\langle W \rangle = \int_{-\infty}^{W_0} (W - W_E) \rho_{WS}(W) dW + W_E = W_E - \left(\frac{D_E}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{F_R(\Pi_R)}, \quad (2.3.15)$$

$$F_R(\Pi_R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\Pi_R^2} \operatorname{erfc}(\Pi_R),$$

где $\operatorname{erfc}(x)$ – дополнительный интеграл вероятностей [Абрамовиц, Стиган, 1979].

Выражение для корреляционной функции флуктуаций влагозапаса относительно среднего стационарного значения $\Delta W = W - \langle W \rangle$ можно получить, умножив (2.3.10) в момент времени $t+\tau$ ($\tau > 0$) на $\Delta W(t)$, осредняя с учетом $d\langle W \rangle/dt = 0$ и учитывая, что $\langle f_W(t+\tau)\Delta W(t) \rangle = 0$. Последнее соотношение следует из того, что, во-первых, решение задачи Коши для (2.3.10) в момент времени t функционально не зависит от значений вынуждающей силы в будущие моменты времени – принцип динамической причинности [Жляцкин, 2002]. Однако статистическая связь может существовать из-за статистической связи значений случайного возбуждения в разные моменты времени – конечности времени корреляции – что не имеет места для дельта-коррелированного случайного процесса. Окончательно получаем уравнение для корреляционной функции флуктуаций влагозапаса в виде

$$\frac{dK_W(\tau > 0)}{d\tau} = -\langle U'(t+\tau)\Delta W(t) \rangle, \quad U' = \frac{\partial U}{\partial W}, \quad K_W(0) = \sigma_W^2. \quad (2.3.19)$$

Уравнение (2.3.19) не замкнуто из-за нелинейности в силу того, что в правую часть будут входить моменты более высокого порядка например, $\langle \Delta W(t+\tau)^2 \Delta W(t) \rangle$ и более старшие (получается бесконечная цепочка уравнений для моментов). Однако численные эксперименты указывают [Delworth, Manabe, 1988], что в статистическом смысле (2.3.10) эквивалентно линейному стохастическому дифференциальному уравнению – корреляционная функция решения спадает экспоненциально. Это обстоятельство является необходимым условием для применения приближенных методов, сводящих дифференциальное уравнение для корреляционных функции к линейному. К числу таких методов принадлежит и метод «квазиравновесного приближения» [Brey et al., 1985], проверенный, например, при нахождении корреляционной функции одномерного уравнения Ланжевена с потенциалом вида $U(x) = -ax^2 + bx^4$ («двойная потенциальная яма»)

Изложим вкратце этот метод в одномерном случае. Поскольку читателю в дальнейшем возможно придется столкнуться с решением нелинейных проблем, подобным возникшей в данном примере с нелинейным механизмом формирования поверхностного стока, изложим метод для произвольной переменной x . В одномерном случае для любой переменной x (как и для W), которая подчиняется одномерному уравнению Ланжевена

$$\frac{dx}{dt} = -U'(x) + f(t), \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2D\delta(t-t'), \quad U'(x) = \frac{dU}{dx}. \quad (2.3.20)$$

Уравнению Ланжевена (2.3.20) соответствует уравнение Фоккера–Планка (2.3.7) для одноточечной плотности распределения вероятностей с прямым и сопряженным операторами

$$\mathbf{L}_{FP} = \frac{d}{dx}U'(x)(\dots) + D\frac{d^2}{dx^2}(\dots), \quad \mathbf{L}_{FP}^+ = -U'(x)\frac{d}{dx}(\dots) + D\frac{d^2}{dx^2}(\dots), \quad (2.3.21)$$

которому также будут удовлетворять и плотность вероятностей перехода и двухточечная (двухвременная) корреляционные функции. При этом сопряженность подразумевает, что $\int dx F \mathbf{L}_{FP} G = \int dx G \mathbf{L}_{FP}^+ F$.

Основная идея метода квазиравновесного приближения заключается в том, что первые моменты $\langle x(t) \rangle$ и корреляционные функции $K(t, t') = \langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle$ ($\Delta x(t) = x(t) - \langle x(t) \rangle$) вычисляются через соответствующие одноточечные и двухточечные квазиравновесные плотности распределения вероятностей $\rho_{LE}(x, t)$ и $\rho_{LE}(x, t; x', t')$, которые определяются из условия совпадения соответствующих средних и корреляционных функций, рассчитанных по точным кинетическим уравнениям. Например

$$\rho_{LE}(x,t) = A(t) \exp\left\{-\frac{U}{D} + \gamma(t)x\right\}, \quad \langle x(t) \rangle_{LE} = \langle x(t) \rangle = \int dx \rho_x(x,t)x. \quad (2.3.22)$$

В (2.3.22) $A(t)$ – нормировочная константа, а $\gamma(t)$ определяется из условия совпадения точных и квазиравновесных средних. Аналогично строится и квазиравновесная двухточечная функция плотности распределения вероятностей

$$\begin{aligned} \rho_{LE}(x,t;x',t') &= \rho_{LE}(x,t)\rho(x',t') + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial \langle x(t) \rangle} \rho_{LE}(x,t)\right] dy(y - \langle y(t) \rangle) \rho(y,t;x',t'), \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

где плотность вероятностей $\rho(x,t;x',t')$ удовлетворяет по левым аргументам уравнению Фоккера–Планка: $\partial_t \rho = L_{FP} \rho$. Двухточечная корреляционная точная и квазиравновесная функции совпадают. Для того, чтобы показать это, умножим (2.3.23) на произведение xx' и проинтегрируем по этим переменным, получив тем самым квазиравновесную корреляционную функцию. Затем учтем, что

$$\begin{aligned} \int dx x \frac{\partial \rho_{LE}(x)}{\partial \langle x(t) \rangle} &= \frac{\partial}{\partial \langle x(t) \rangle} \int dx x \rho_{LE}(x,t) = 1, \\ \int dx dx' \rho_{LE}(x,t) \rho_{LE}(x',t') xx' &= \langle x(t) \rangle \langle x'(t') \rangle. \end{aligned}$$

После несложного преобразования получаем равенство точной и квазиравновесной корреляционных функций.

Следующий шаг метода квазиравновесного приближения заключается в том, что в дифференциальном уравнении для временной корреляционной функции используется квазиравновесная двухточечная плотность распределения вероятностей

$$\begin{aligned} \frac{dK(t,t')}{dt} &= \frac{d\langle x(t)x(t') \rangle}{dt} = \iint dx dx' [L_{FP}^+ x] \{x' \rho_{LE}(x,t;x',t')\} = \langle L_{FP}^+ x \rangle_{LE} \langle x(t') \rangle + \\ &+ \langle [x(t) - \langle x(t) \rangle] x(t') \rangle \frac{\partial}{\partial \langle x(t) \rangle} \langle L_{FP}^+ x \rangle. \end{aligned}$$

Из этого соотношения следует, что для отклонений от средних справедливо

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle = \frac{\partial \langle L_{FP}^+ x \rangle_{LE}}{\partial \langle x(t) \rangle} \cdot \langle \Delta x(t) \Delta x(t') \rangle.$$

Для стационарных флуктуаций относительно некоторого среднего значения (для простоты можно считать $\langle x \rangle = 0$), можно показать, учитывая определение сопряженного оператора Фоккера–Планка (2.3.21) и определение квазиравновесной плотности вероятности (2.3.23), что

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} = -\frac{\partial \langle U'(x) \rangle_{LE}}{\partial \langle x(t) \rangle} (x=0) K(\tau) = \frac{\langle U'(x) \Delta x \rangle_{st}}{\langle (\Delta x)^2 \rangle_{st}} K(\tau). \quad (2.3.24)$$

Поскольку в рассматриваемом примере стационарная плотность распределения вероятностей совпадает с локальноравновесной, в (2.3.24) мы заменили индекс локального равновесия на значок, указывающий на флуктуации вблизи устойчивого стационарного состояния.

Применим полученные соотношения (2.3.24) для расчета $K_W(\tau)$:

$$\frac{dK(\tau)}{d\tau} = -\frac{\langle \Delta W U'(W) \rangle_{st}}{\langle \Delta W^2 \rangle_{st}} K(\tau). \quad (2.3.25)$$

В (2.3.25) выражение $\langle f \rangle_{st}$ обозначает статистическое осреднение произвольной функции $f(W)$ по стационарному решению уравнения (2.3.11) для плотности распределения вероятностей $\rho_{WS}(W, \lambda_c)$. Таким образом, в квазиравновесном приближении, зная ρ_{WS} , можно определить τ_W , как величину, обратную коэффициенту обратной связи и (2.3.25):

$$\tau_W = \sigma_W^2 \langle U'(W) W \rangle_{st}^{-1}. \quad (2.3.26)$$

Для любой стохастической модели типа (2.3.11), в которой ставится граничное условие $\rho_{WS}(\pm\infty) = 0$, выполняется соотношение [Демченко, 1990],

$$\tau_W = \frac{\sigma_W^2}{D_W}, \quad (2.3.27)$$

в справедливости которого можно убедиться интегрированием по частям

$$\langle W U' \rangle_{st} = -D_W \int_{-\infty}^{+\infty} W \frac{d\rho_{WS}}{dW} dW = D_W \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{WS} dW = D_W,$$

Здесь следует сделать одно замечание. Поскольку влагозапас W не может быть отрицательным, ставить граничное условие при $W=-\infty$, строго говоря, некорректно. Однако для малых флуктуаций вдали от $W=0$ это не должно приводить к большим погрешностям в определении τ_W и σ_W . Если же флуктуации сосредоточены вблизи $W=0$, вклад нелинейности, связанной со стоком, мал. В этом случае квазиравновесное приближение дает для τ_W точный результат независимо от вида функции плотности вероятностей.

Используя (2.3.27) и вычисляя σ_W^2 по аналогии с $\langle W \rangle$ с помощью стационарной плотности распределения вероятностей (2.3.16), для времени корреляции получаем формулу

$$\tau_W = \tau_E \left(1 + \frac{\Pi_R}{F_R(\Pi_R)} - \frac{1}{2F_R^2(\Pi_R)} \right). \quad (2.3.28)$$

Для проверки применимости квазиравновесного приближения при описании зависимости τ_W от внешних параметров проведено сравнение расчета τ_W методом Монте-Карло по конечно-разностной модели (при применении «модели ведра») с результатом применения формулы (2.3.28). В качестве случайных источников были выбраны флуктуации осадков, заданные датчиком независимых случайных чисел, распределенных по экспоненциальному закону $\rho(P) = \langle P \rangle^{-1} \exp(-P/\langle P \rangle)$ [Semenov, Bengtson, 2003]. На рис. 2.3.1 приведены результаты расчета зависимости τ_W от E_0 при фиксированных значениях средних осадков и критического влагозапаса.

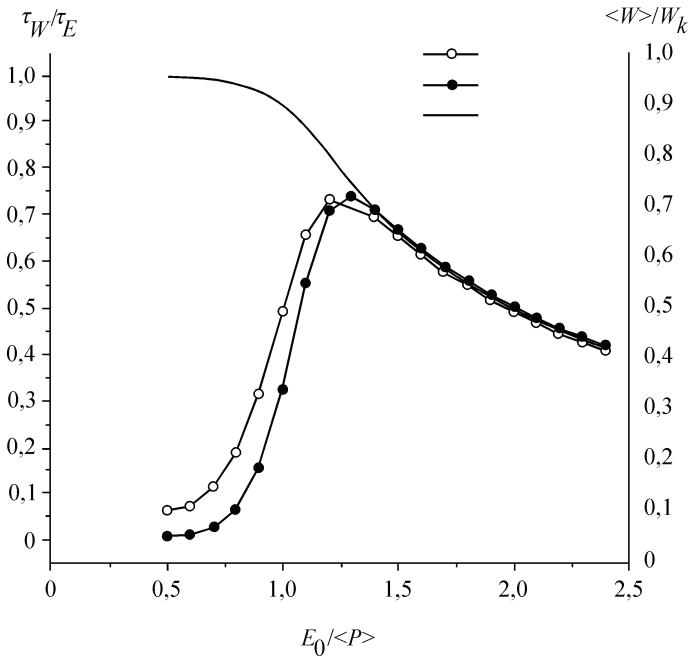


Рис. 2.3.1. Зависимость безразмерного времени корреляции τ_W/τ_E от $E_0/\langle P \rangle$.

1 – расчет по конечно-разностной модели (флуктуации осадков распределены по экспоненциальному закону); 2 – расчет по квазиравновесному приближению (2.3.28); 3 – величина среднего влагозапаса по (2.3.15), нормированного на критический.

Реальные времена корреляции определяются в регионах без избыточного увлажнения, которые занимают основную часть суши, масштабом $\tau_E = 2 \div 3$ мес. Это проверено на эмпирическом материале [Vinnikov, Yeserkepova, 1991]. Проведенный в данном разделе анализ роли нелинейности не учитывает, например, сезонного хода динамики увлажнения. Поэтому данный фрагмент раздела следует рассматривать, как демонстрацию возможностей современных методов использования уравнения Фоккера–Планка в задачах определения флуктуационных характеристик гидрологического режима.

На рисунке 2.3.1 видно, во-первых, что смена знака зависимости времени корреляции от величины потенциальной испаряемости происходит уже при $E_0 \approx 1,25 \langle P \rangle$. При этих значениях, согласно данным рисунка (кривая 3), средний влагозапас составляет 0,7 от критического. При $E_0 = \langle P \rangle$ это отношение равно 0,8, а рассчитанная по стохастической модели величина τ_W составляет около половины от ее оценки по величине τ_E для линейной модели в отсутствие стока. Сравнение с эмпирическими данными об отношении величин среднего влагозаписа к критическому [Vinnikov, Yeserkepova, 1991] для территории бывшего СССР показывают, что области с $\langle W \rangle$ близким к W_k занимают большую часть высоких и значительную часть умеренных широт.

2.4. Описание предсказуемости стохастических природных процессов в рамках линейных уравнений Ланжевена

Говоря о прогнозах и предсказуемости природных процессов можно иметь в виду очень разные характеристики и использовать различные критерии для их оценок. Далее мы будем говорить о динамических прогнозах, получаемых в результате интегрирования физико-математических моделей исследуемых природных процессов на некоторый промежуток времени t в будущее. Помимо этого вида прогнозов существуют и другие. Например, в инерционных прогнозах будущее состояние природных объектов получают интерполяцией в будущее их текущего состояния, опираясь на различные методы, в том числе и статистические. На основании такого рода прогнозов были выдвинуты так называемые «проекты века»: проекты по переброске части стока северных рек для предотвращения обмеления Каспийского и Аральского морей, перекрытию выхода в Каспийское море залива Кара-Богаз-Гол. Последний проект был даже осуществлен. Однако до начала переброски части стока североамериканских рек в Волгу с начала 1980-х годов XX века уровень Каспия начал стремительно расти, и причиной этого стали, в конечном счете, произошедшие изменения типов атмосферной циркуляции (см. рис. 3.3.1). Возможности инерционных прогнозов во многом связаны с наличием квазипериодических процессов, например явлением Эль-Ниньо – Южное колебание, арктическим (североатлантическим) колебанием, и рядом других планетарных процессов, к поведению которых можно «привязать» состояние явлений регионального масштаба.

Существование инерционных природных объектов, таких, как морские льды в полярных широтах, может увеличить предсказуемость прогнозов состояния атмосферы из-за инерционности элементов климатической системы, которые задают граничные условия для потоков тепла, влаги и импульса между подстилающей поверхностью и атмосферой. В частности показано, что привлечение данных о протяженности морского льда, влажности почвы и аномалий температуры поверхности океана повышает успешность прогнозов [Мелешко и др., 2001]. Однако в этой работе показано, что успешность прогнозов для внетропических широт Северного полушария ограничивается первым месяцем, а затем резко падает, свидетельствуя, по мнению авторов статьи, об ограниченном действии «памяти» о начальном состоянии атмосферы. Исследование вопросов предсказуемости атмосферы при ее взаимодействии с более инерционными звеньями природной среды, например, с верхним слоем океана, требует развития методов анализа предсказуемости объектов природной среды с разными временными масштабами релаксации.

Принципиальным вопросом при прогнозировании природных процессов является их предсказуемость. Вопрос заключается в определении временного интервала – интервала предсказуемости, на котором ошибка прогноза не выходит за определенные рамки. Предсказуемость геофизических переменных, в частности, атмосферных, лимитируется неопределенностью задания начального состояния начальной ошибкой, неопределенностью параметров динамической модели и внутренней неустойчивостью самого моделируемого объекта. Как показали многочисленные исследования [Дымников, 1997], предсказуемость атмосферных переменных лимитируется в основном именно внутренней неустойчивостью.

Получить информацию о предсказуемости определенного объекта можно проводя вычислительные эксперименты с моделирующей его поведение динамической системой [Дымников, 1998]. Пусть она задана вектором переменных $\mathbf{Z}(t)$ и оператором эволюции \mathbf{L} (например, системой обыкновенных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями):

$$\partial_t \mathbf{Z} = \mathbf{L}(\mathbf{Z}), t > 0, \quad \mathbf{Z}(t = 0) = \mathbf{Z}_0. \quad (2.4.1)$$

С помощью соответствующей метрики вводится расстояние $\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|$ между траекториями $\mathbf{Z}(t)$ и $\mathbf{Z}(t) + \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ с близкими начальными данными \mathbf{Z}_0 и $\mathbf{Z}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_0$. Разность начальных данных рассматривается как неизбежная начальная ошибка. Далее ставится множество численных экспериментов с различными значениями $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ и вычисляется средняя величина $\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|$.

Будем считать, что эффекты разбегания траекторий, характеризующие постепенную потерю предсказуемости, имеют место уже при малых $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$. Это последнее условие позволяет линеаризовать систему (2.4.1) относительно траектории $\mathbf{Z}(t)$. Вместо (2.4.1) запишем систему линейных уравнений

$$\partial_t \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}(\mathbf{Z}(t)) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t = 0) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 \text{ с решением } \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \mathbf{B}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_0. \quad (2.4.2)$$

Норму $\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|$ можно определить через скалярное произведение с помощью матрицы \mathbf{B} и сопряженной ей \mathbf{B}^+ :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|^2 = (\boldsymbol{\varepsilon}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(t)) = (\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_0, \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_0) = (\mathbf{B}^+ \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0). \quad (2.4.3)$$

Собственные числа λ_i и соответствующие им собственные векторы $\boldsymbol{\psi}_i$ матрицы $\mathbf{B}^+ \mathbf{B}$ определяют поведение траекторий системы (2.4.1) вблизи $\mathbf{Z}(t)$ [Дымников, 1998]. Положительным λ_i соответствуют локальные показатели Ляпунова $\lambda_i^{(L)} \sim (1/t) \ln(\|\boldsymbol{\varepsilon}_i(t)/\boldsymbol{\varepsilon}_{0i}\|) \sim \lambda_i/2$ на интервале $(0, t)$, которые задают скорость экспоненциального разбегания близких траекторий вдоль направленных соответствующих собственных векторов [Dymnikov, Filatov, 1997]. Ввиду нелинейности системы и ограниченности области изменений переменных рост $\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|$ должен когда то прекратиться, и $\|\boldsymbol{\varepsilon}(t)\|$ начинает колебаться вблизи некоторого определенного значения. Таким образом рост ошибок естественно прекращается, временной интервал, на котором он становится сравним со стационарной в среднем мерой естественной изменчивости, задает время предсказуемости.

В контексте тех процессов, динамика которых изучается в данной книге принципиально важно рассмотреть предсказуемость, которая определяется внутренней неустойчивостью динамической системы. Переходим к рассмотрению данного процесса.

Неустойчивость можно трактовать как наличие шумов в системе, приводящих к тому, что в течение конечного промежутка времени – интервала предсказуемости – разброс отдельных «прогнозов», генерируемых по ансамблю близких начальных значений постепенно сравнивается с величиной ошибок (заданных какой-либо мерой). Понимаемые в таком аспекте первые теоретические оценки предсказуемости температуры на основе стохастических моделей климата были проведены для линейных стохастических энергобалансовых моделей [North, Cahalan, 1981]. Отклонения некоторой эффективной температуры поверхности ΔT_S от среднеклиматического значения в таких моделях для теплоизолированной с боковых границ области подчиняются линейным уравнениям Ланжевена (2.2.12) или (2.2.13). Релаксация начальной аномалии $\Delta T_S(0)$ происходит путем восстановления радиационного баланса на верхней границе атмосферы, нарушенного из-за этой аномалии, за счет излучения длинноволновой радиации в космос с учетом возможного воздействия положительной дестабилизирующей обратной связи альbedo – температура. Оба эти процесса определяют температурную чувствительность радиационного баланса к изменениям температуры поверхности и постоянную релаксации τ_T в (2.2.13). В [North, Cahalan, 1981] рассмотрен только первый процесс с характерным временем релаксации $\tau_R = C/B = \tau_T$, где C – некоторая эффективная теплоемкость системы, B – коэффициент температурной чувствительности уходящей в космос длинноволновой радиации. Решение задачи Коши для ΔT_S (2.2.13) с начальным условием $\Delta T_S(0)$

шение задачи Коши для ΔT_S (2.2.13) с начальным условием $\Delta T_S(0)$ можно представить суммой двух слагаемых – детерминированной и случайной компонент («сигнала» и «шума»)

$$\Delta T_S(t) = \Delta T_S^{(d)}(t) + \Delta T_S^{(n)}(t). \quad (2.4.4)$$

Первое слагаемое в (2.4.4) $\Delta T_S^{(d)}(t)$ представляет решение задачи Коши для (2.2.13) с заданным начальным значением $\Delta T_S(0)$ в отсутствие случайных сил и в дальнейшем трактуется, как «сигнал» (верхний индекс (d) обозначает «determinated» – детерминированный). Его можно рассчитать по (2.2.13), полагая $f(t)=0$ и задавая начальное отклонение $\Delta T_S(0)$,

$$\frac{d}{dt}\Delta T_S^{(d)}(t) = -\frac{1}{\tau_T}\Delta T_S^{(d)}(t), \quad \Delta T_S^{(d)}(0) = \Delta T_S(0). \quad (2.4.5)$$

При осреднении по всем возможным начальным состоянием $\langle \Delta T_S(0) \rangle$ значение $\langle \Delta T_S^{(d)}(t) \rangle = \langle \Delta T_S(0) \rangle \exp(-t/\tau_T)$ равно нулю. Однако величина дисперсии $\langle (\Delta T_S^{(d)}(t))^2 \rangle = \langle \Delta T_S(0)^2 \rangle \exp(-2t/\tau_T)$ в каждый момент времени отлична от нуля и далее принимается в качестве меры «сигнала».

Отклонения от этого детерминированного «сигнала» связаны в рассматриваемой стохастической модели с воздействием ланжевеновских короткопериодных источников $f(t)$ в (2.2.13). Рассмотрим второе слагаемое в (2.4.4) – величину $\Delta T_S^{(n)}(t)$, эволюция которой удовлетворяет (2.2.13) с нулевым начальным значением (верхний индекс (n) обозначает «noise» – шум). Домножив (2.2.13), записанное относительно $\Delta T_S^{(n)}(t)$, на $2\Delta T_S^{(n)}(t)$, получим уравнение для искомого шума

$$\frac{d(\Delta T_S^{(n)}(t))^2}{dt} = -\frac{2}{\tau_T}(\Delta T_S^{(n)}(t))^2 + 2\Delta T_S^{(n)}f(t), \quad (\Delta T_S^{(n)})^2(0) = 0,$$

которое осредним по ансамблю реализаций $f(t)$ с помощью уже использованного в разделе (2.3) метода расщепления корреляций по теореме Новикова. В результате получим

$$\frac{d\langle (\Delta T_S^{(n)}(t))^2 \rangle}{dt} = -\frac{2}{\tau_T}\langle (\Delta T_S^{(n)}(t))^2 \rangle + 2D_f. \quad (2.4.6)$$

Из (2.4.6) следует, что

$$\langle (\Delta T_S^{(n)}(t))^2 \rangle = \langle (\Delta T_S^{(n)})^2 \rangle_\infty [1 - \exp(-2t/\tau_T)]. \quad (2.4.6a)$$

Индекс « ∞ » в (2.4.6a) означает предел переменной при $t \rightarrow +\infty$, то есть статистически стационарное значение σ_{st}^2 .

Случайное воздействие со временем приводит к тому, что амплитуды «сигнала» и «шума» в (2.4.4) становятся сравнимыми, это накладывает естественные ограничения на период времени, для которого возможен прогноз. Этот период зависит от инерционности системы – ее способности сохранять память о начальном состоянии.

Интервал времени среднестатистической предсказуемости [Зубарев, Демченко, 1992] определяется, как время t_* , за которое дисперсия флуктуаций решения (2.2.13) $\Delta T_S^{(d)}(t)$, связанная с неопределенностью задания начальных условий $\Delta T_S(0)$, сравнивается с дисперсией флуктуаций, вызванной стохастическими источниками $f(t) - \Delta T_S^{(n)}(t)$,

$$\langle (\Delta T_S^{(d)}(t_*)^2) \rangle = \langle (\Delta T_S^{(n)}(t_*)^2) \rangle. \quad (2.4.7)$$

В (2.4.7) слева осреднение ведется по ансамблю начальных состояний со стационарной плотностью вероятностей ρ_{st} . Дисперсия «шумов» $\langle (\Delta T_S^{(n)}(t))^2 \rangle$ в начальный момент времени равна нулю и при $t \rightarrow \infty$ стремится к стационарному значению $\sigma_{st}^2 = \langle (\Delta T_S^{(n)}(t))^2 \rangle_\infty$, определяемому по ρ_{st} – стационарной плотностью вероятностей решений (2.2.13). Далее будем считать, что распределение начальных отклонений в (2.4.5) распределено с той же стационарной плотностью вероятностей ρ_{st} . В качестве меры среднестатистической предсказуемости ΔT_S вводится величина [Зубарев, Демченко, 1992]

$$J_S(t) = 2 \frac{\langle (\Delta T_S^{(n)}(t))^2 \rangle_0}{\sigma_{st}^2} - 1. \quad (2.4.8)$$

В начальный момент времени $J_S(0) = 1$, а с ростом t эта функция убывает и при некотором значении обращается в нуль, причем значение t_* , при котором это происходит, совпадает с интервалом предсказуемости, определяемым (2.4.7).

Доказательство правильности выбора критерия (2.4.8) приведем для многомерной системы уравнений Ланжевена. Для любой линейной системы стохастических дифференциальных уравнений с постоянными матрицами коэффициентов Λ и интенсивности случайных сил \mathbf{D}

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = -\Lambda_{ij} Y_j(t) + f_i(t), \quad \langle f_i(t) f_j(t') \rangle = 2D_{ij} \delta(t-t'). \quad (2.4.9)$$

Матрица ковариаций решения задачи Коши (2.4.9) $\langle (\Delta \mathbf{Y}^{(n)})^2 \rangle_t$ с элементами $\langle [Y_i(t) - Y_i(0)][Y_j(t) - Y_j(0)] \rangle$, составленными из осредненных произведений случайных отклонений от заданных начальных значений под действием случайных сил, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\langle (\Delta \mathbf{Y}^{(n)})^2 \rangle_t}{dt} + \Lambda \langle (\Delta \mathbf{Y}^{(n)})^2 \rangle_t - \langle (\Delta \mathbf{Y}^{(n)})^2 \rangle_t \Lambda^T = 2\mathbf{D}, \quad \langle (\Delta \mathbf{Y}^{(n)})^2 \rangle_0 = 0 \quad (2.4.10)$$

и находится по формуле [Hasselmann, 1976]

$$\langle (\Delta \mathbf{Y}^{(n)})^2 \rangle_t = \langle (\Delta \mathbf{Y}^{(n)})^2 \rangle_\infty - e^{-t\Lambda} \langle (\Delta \mathbf{Y}^{(n)})^2 \rangle_\infty e^{-t\Lambda^T}. \quad (2.4.11)$$

Здесь и далее верхний индекс T означает транспонирование матрицы. В то же время матрица ковариаций решения задачи Коши (2.4.9) без случайных сил, но со случайно распределенными случайными начальными значениями $\langle (\Delta \mathbf{Y}^{(d)})^2 \rangle_t$ с элементами $\langle \Delta Y_i^{(d)}(t) \Delta Y_j^{(d)}(t) \rangle$, как можно показать, также подчиняется уравнению (2.4.9) с нулевой правой частью и решением

$$\langle (\Delta \mathbf{Y}^{(d)})^2 \rangle_t = e^{-t\Lambda} \langle (\Delta \mathbf{Y}^{(d)})^2 \rangle_0 e^{-t\Lambda^T}. \quad (2.4.12)$$

Поскольку при принятом определении среднестатистической предсказуемости считается, что $\langle (\Delta \mathbf{Y}^{(d)})^2 \rangle_0 = \langle (\Delta \mathbf{Y}^{(d)})^2 \rangle_\infty$, то условие (2.4.7) для определения интервала времени предсказуемости k -того элемента Y_k определяется из (2.4.11), (2.4.12)

$$J_k(t_*) = 2 \frac{\langle \delta \mathbf{Y}^2(t_*) \rangle_{kk} - 1}{\langle \delta \mathbf{Y}^2(0) \rangle_{kk}} = 0. \quad (2.4.13)$$

Критерий (2.4.8) является частным случаем более общего (2.4.13). В дальнейшем этот критерий будет использован в разделе, связанном с предсказуемости температуры воздуха при взаимодействиями с аномалиями ТПО в главе 4.

В одномерном случае согласно (2.2.5)

$$\langle (\Delta T_S^{(n)}(t_*))^2 \rangle = \sigma_{st}^2 \exp(-2t_* / \tau_T),$$

и равенство нулю (2.4.7) означает, что время предсказуемости t_* можно определить из соотношения

$$2 \exp(-2t_* / \tau_T) = 1$$

как

$$t_* = \frac{\tau_T}{2} \ln 2 = 0,69 \frac{\tau_T}{2}. \quad (2.4.14)$$

Масштаб времени $t = \tau_T/2$ связан с определением интервала предсказуемости, введенного в [North, Cahalan, 1981] из определения ошибки $N = \|\varepsilon(t)\|^{1/2}$ прогноза, как меры разности отклонения аномалии температуры $\Delta T_S(t)$ от среднего отклика $\langle T_S(t) \rangle$ при воздействии случайных сил $f(t)$

$$N(t) = N_\infty [1 - \exp(-2t/t_*)]^{1/2}, \quad N_\infty = \sigma_{st}^2. \quad (2.4.15)$$

Согласно [North, Cahalan, 1981] соотношение (2.4.15) задает интервал предсказуемости $t_* = \tau_T/2$, немного больший, чем определяемый соотношением (2.4.14). Однако оба интервала предсказуемости, как по (2.4.14), так и по (2.4.15), отличаются не сильно и составляют несколько десятых долей от τ_T .

При принятой в разделе 2.2 средней оценке $B = 2 \text{ Вт/м}^2$ и оценке интегральной теплоемкости атмосферы $C_a \sim 10^7 \text{ Дж/м}^2$ [North, Cahalan, 1981], получим оценку $\tau_T = 58$ суток. В упомянутой работе содержатся и результаты численных экспериментов по определению времен релаксации температуры атмосферы к изменению солнечной постоянной и к удвоению концентрации углекислого газа в атмосфере. Эти оценки совпали с τ_T полученной по энергобалансовой модели (около 2 месяцев).

ГЛАВА 3. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗЛИЧНЫХ ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ

3.1. Температура и соленость в деятельном слое Мирового океана

Мировой океан покрывает около 65% земной поверхности, его средняя глубина составляет около 4 км, следовательно, это очень тонкий слой воды у поверхности планеты (радиус земного шара равен примерно 6400 км). Океаны достаточно однородны по своему химическому составу: концентрация солей (соленость) редко выходит за пределы значений 34–37 г/кг. На рис. 3.1.1 показано типично наблюдаемое распределение температуры, солености и плотности с глубиной. Видно, что в полярных районах у поверхности располагается холодный и распресненный слой воды, а с глубиной значения температуры, солености и плотности сначала несколько возрастают (в слое галоклина и пикноклина), а затем профили практически не изменяются с глубиной. В умеренной зоне и в тропиках у поверхности находится слой теплой воды с квазиоднородным распределением температуры с глубиной (так называемый верхний квазиоднородный слой – ВКС). Ниже температура сначала быстро убывает, а затем переходит в квазипостоянное распределение с глубиной.

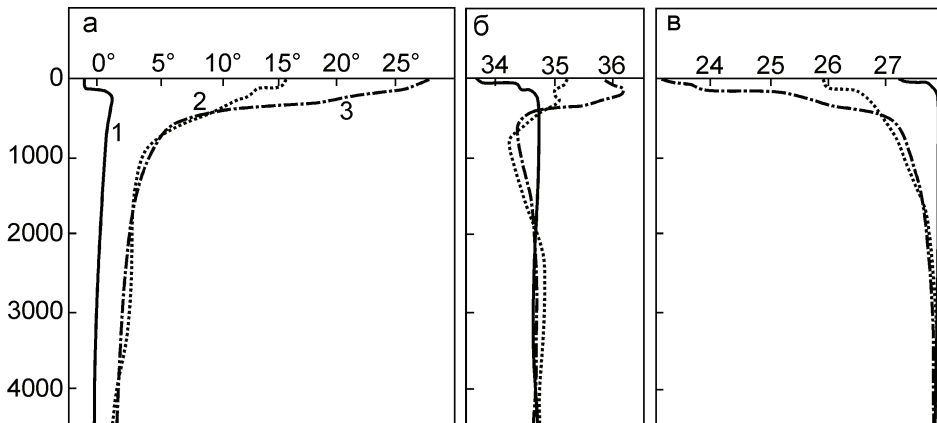


Рис. 3.1.1. Температура (а, °С), соленость (б, промилле, ‰) и плотность воды (в, кг/м³) как функция глубины в полярной (1), умеренной (2) и тропической (3) зонах.

Такая картина характерна для большей части акватории Мирового океана – исключения могут проявляться в области стрежней океанских течений и у берегов. Отметим, что если рассматривать «среднее» по поверхности всей акватории распределение, в каком-то смысле типичное для всего Мирового океана, то таким является, несомненно, профиль, близкий к тропическому, поскольку площадь, которую занимают на Земном шаре полярные океаны, весьма мала.

Наблюдаемое распределение температуры с глубиной связано с тем, что океан (за исключением полярных областей) нагревается сверху. Поэтому вода у его поверхности теплее и «легче», чем в нижележащих слоях. В таких условиях устойчивой стратификации, примыкающий к поверхности ВКС создается за счет турбулентного перемешивания, энергию для которого составляет действие ветра на поверхностный слой. В некоторых случаях важную роль в формировании ВКС могут играть упорядоченные движения – циркуляция Ленгмюра [Полонский, 1989]. Если вода в ВКС становится плотнее, чем в нижележащих слоях (из-за зимнего понижения температуры и (или) повышения солености), то развивается конвекция до больших глубин и толщина ВКС существенно возрастает. Так, воды могут погружаться весьма глубоко (до 2–4 км), как, например, в северо-западной части Средиземного моря [MEDOC ..., 1970; Schott et al., 1993], формируя промежуточные и глубинные водные массы.

Рассмотрим более детально распределение температуры в верхних слоях субтропического океана (рис. 3.1.2). Те его слои, в которых существенно взаимодействие с атмосферой и отчетливо выражен сезонный ход, представляют собой так называемый деятельный слой океана (ДСО). В нем выделяется ВКС и слой сезонного термоклина. Нижняя его граница принимается за глубину, на которой сезонные колебания температуры, а также солености и плотности, не превышают некоторого заданного значения. Деятельный слой океана сравнительно невелик, а основная же толща вод, из-за своей инерционности и отсутствия эффективных механизмов локального вертикального взаимодействия, начинает ощущать воздействие атмосферы только на масштабах времени в несколько лет – десятков лет.

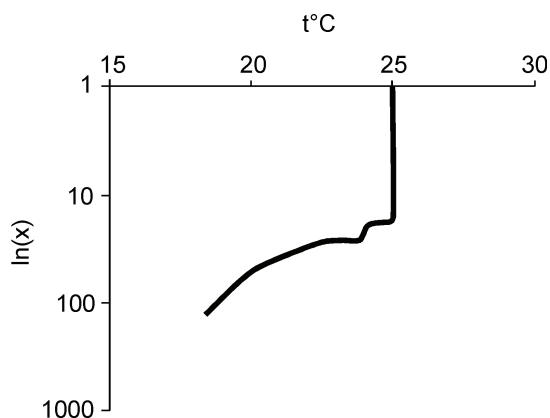


Рис. 3.1.2. Характерный профиль температуры воды в деятельном слое субтропического океана, океанская станция погоды «Е» (Северная Атлантика), 1958 г. [Тужилкин, 1979].

Вне океанских фронтальных зон температура и соленость в ДСО больше изменяются по вертикали в пределах нескольких сотен метров, чем по горизонтали на расстоянии многих сотен километров. Это означает, что в таких областях локальный обмен энергией и импульсом между атмосферой и океаном и вертикальное перемешивание должны изменять локальные условия гораздо сильнее, чем горизонтальная адвекция и перемешивание. Эти рассуждения (которые, естественно, подкреплены эмпирическими оценками) позволяют, упростив управляющие уравнения, оставить в них только производные по вертикальной координате.

Четкость вертикальной структуры ДСО предопределяет априорную идею построения такой его параметризации, в которой должен явно выделяться однородный слой (ВКС). При этом предполагается, что процессы турбулентного перемешивания выравнивают здесь профиль температуры «очень быстро», так что если рассматривать процессы с гораздо большим (чем, приблизительно, 1 сутки) характерным временем, то ВКС все время будет однородным. В этом случае можно рассмотреть условие сохранения его теплосодержания в следующем виде:

$$\frac{\partial c_p \rho h T_w}{\partial t} = B_s - B_h, \quad (3.1.1)$$

где T_w – температура воды ВКС (и, следовательно, температура поверхности океана), $B_s \equiv R_s - P - LE_s$ – тепловой баланс поверхности. Здесь $R_s = Q(1 - \alpha) + F_a - F_s$ есть алгебраическая сумма потоков суммарной солнечной радиации (α – альбедо поверхности океана), теплового излучения атмосферы и теплового излучения поверхности, а P_s , LE_s – потоки явного и скрытого тепла (E_s – скорость испарения, L – константа фазовых переходов водяного пара – удельная теплота парообразования). Разные знаки у потоков тепла в формуле для B_s связаны с традиционно различающимися определениями, так, $R_s > 0$ в случае прихода тепла к поверхности океана, а турбулентные потоки положительны тогда, когда направлены вверх. На нижней границе ВКС поток солнечного излучения уже практически может не приниматься во внимание, так что B_h определяется исключительно динамическими эффектами (см. ниже).

Дифференцируя (3.1.1), и имея в виду, что толщина ВКС может быть переменной во времени величиной, получим

$$\rho h \frac{\partial T_w}{\partial t} + T_s h \frac{\partial \rho}{\partial t} + T_s \rho \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{c_p} (B_s - B_h).$$

Рассмотрение динамики плотности требует введения в рассмотрение уравнения состояния. Для морской воды оно представляет собой довольно сложную конструкцию [Архипкин, Добролюбов, 2005]. Однако вне высокоширотных зон можно считать, что изменения плотности следуют за изменениями температуры и первые два слагаемых можно объединить, вводя некоторое среднее значение плотности.

Изменение h может быть связано с разными процессами. Так, в холодное время года развивается конвекция, выравнивающая характеристики на протяжении нескольких сотен метров. Летом для ДСО характерна устойчивая стратификация, в которой глубина перемешанного слоя определяется совместным воздействием ветрового перемешивания и притока тепла с поверхности. Для иллюстрации сезонного хода на рис. 3.1.3 показан типичный годовой ход толщины ВКС.

Помимо этого, в океане могут развиваться вертикальные движения как реакция на локальные значения дивергенции (конвергенции) поля течений. В ДСО вне фронтальных зон они преимущественно возникают как реакция на относительную завихренность тангенциального напряжения ветра на поверхности океана $(\tau_{x,0}, \tau_{y,0})$. Выражение для вертикальной скорости (экмановской) [Гилл, 1986] имеет вид

$$w_E = \frac{1}{\rho f} \left(-\frac{\partial \tau_{y,0}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{x,0}}{\partial y} \right).$$

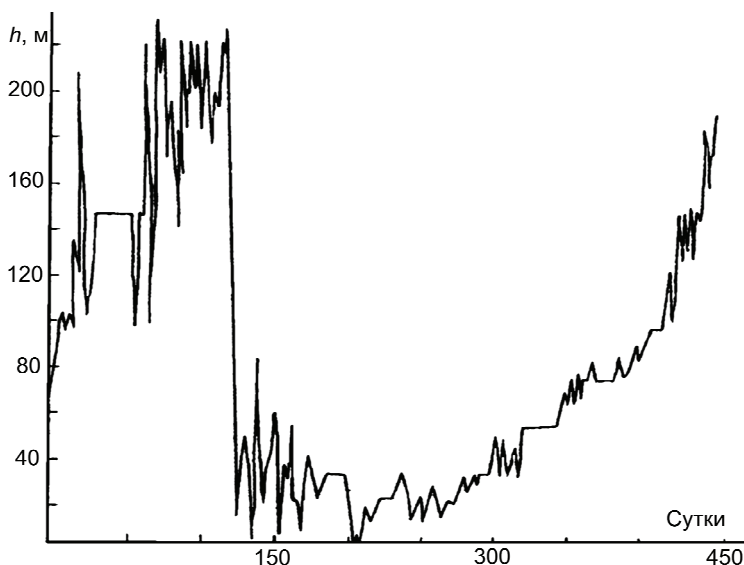


Рис. 3.1.3. Динамика толщины ВКС (с 15 ноября 1976 г. по 2 февраля 1978 г.) на океанской станции погоды «С» (52.75° с.ш., 35.5° з.д.) [Мошонкин, Дианский, 1993].

В случае антициклонической циркуляции развиваются нисходящие движения, в случае циклонической – восходящие движения. Наиболее эффективны они при прохождении тропических циклонов, когда экмановский дрейфовый апвеллинг «подтягивает» термоклин к поверхности (а избыточная вода из ВКС транспортируется в горизонтальной плоскости в соседние регионы), и турбулентные движения эффективно вовлекают холодные воды в ВКС. Это приводит к снижению его температуры и возникновению на поверхности океана «холодного следа» вдоль траектории атмосферного вихря. Однако это – достаточно экзотическое явление. Более важно то, что в атмосфере существуют области с преобладанием завихренности определенного знака, и поэтому можно говорить о том, что и в океане, в ответ на это, возникают климатологические особенности в распределении зон конвергенции (дивергенции), связанных с ними вертикальных движений вод и, как следствие, расположения глубины термоклина.

В реальности картина более сложная, чем та, что следует из экмановской теории. Однако поскольку скорость крупномасштабной вертикальной адвекции в большинстве случаев близка к экмановской скорости и ее географическое распределение хорошо интерпретируется в терминах экмановской теории, часто термин «экмановская скорость» используется без конкретной привязки к изложенной простой теории.

Если не рассматривать формирование зон дивергенции и конвергенции, то есть остановиться на анализе процессов меньших масштабов, то увеличение толщины ВКС происходит вследствие вовлечения вод, лежащих под его нижней границей внутрь турбулентного слоя. С точки зрения бюджета энергии при этом происходят затраты кинетической энергии, генерируемой ветром, на работу против сил плавучести. Напротив, уменьшение толщины ВКС (например, при ослаблении скорости ветра) означает то, что интенсивное перемешивание захватывает меньший слой и формируется новая, расположенная выше прежней, граница, а вовлечение холодных вод при этом отсутствует.

Таким образом, вертикальная скорость складывается из суммы крупномасштабной скорости вертикальной адвекции и скорости турбулентного вовлечения, так что

$$-\frac{dh}{dt} = w_B + w_b.$$

Поскольку горизонтальная неоднородность в вариациях границы оказывает малое влияние при локальном рассмотрении, общую производную можно заменить на частную [Демченко, 1993]. Перепишем уравнение в следующей форме

$$\frac{\partial T}{\partial t} w = \frac{1}{h} T w_B + \frac{1}{h \rho c_p} (B_s - B_h). \quad (3.1.2)$$

Понимание механизма вовлечения позволяет параметризовать приток тепла на нижней границе перемешанного слоя пропорционально скорости турбулентного вовлечения (w_b) и разности температур ВКС и верхней части термо-

клина ($B_h = c_p \rho_w w_b (T_w - T_h) H(w_b)$), причем $H(w_b)$ – функция Хевисайда, которая равна единице при заглублении ВКС и нулю в остальных случаях.

Представленная теория позволяет утверждать, что изменение температуры поверхности океана (и ВКС) определяется, в конечном счете, потоками тепла и импульса на границе с атмосферой, поскольку даже эффект вовлечения на нижней границе ВКС зависит от интенсивности турбулентности в ВКС, определяемой скоростью ветра в приводном слое. Эта «возбуждающая функция» имеет четкий суточный ход, а ее междусуточная изменчивость определяется синоптическими изменениями метеорологического режима с характерным временем порядка нескольких суток. Такой же масштаб времени характерен для реализации процесса вовлечения.

Названные эффекты редко настолько интенсивны, чтобы сразу резко изменить теплосодержание ВКС. Более обычной является ситуация накопления происходящих день ото дня изменений с медленной перестройкой температуры. Действительно, сопоставление интенсивности изменчивости в двух диапазонах: синоптическом (2–10 суток) и «низкочастотном» (12–20 суток) выявило [Тужилкин, 1979], что для внешних локальных факторов (скорости ветра и потоков тепла через поверхность) преобладающей является изменчивость в синоптическом интервале, тогда как в изменчивости термической структуры они приблизительно равны между собой. Это говорит о том, что на рассматриваемом масштабе в изменчивости начинают проявляться свойства красного шума. Действительно, спектр температуры в диапазоне периодов от 10 до 60 суток (по данным измерений на станциях «В», «С», «D» и «Е» в 1958–1959 гг.) хорошо соответствует закону ω^{-2} [Тужилкин, 1979]. Аналогично выглядит спектр флуктуаций температуры по измерениям на станциях «С» в 1976–1978 гг. [Мошонкин, Дианский, 1993]. В работе [Dobrovolski, 1992] локальная авторегрессионная модель была применена для описания аномалий температуры поверхности океана в пределах небольших участков поверхности ($5 \times 5^\circ$ широты и долготы). Атмосферное возбуждение создавалось методом Монте-Карло в виде меняющихся от месяца к месяцу некоррелированных во времени переменных. Статистические параметры «погодного генератора» оценивались по данным наблюдений. Модель позволила описать спектры практически на всей акватории Мирового океана, кроме района Эль-Ниньо. Важным результатом явилось подтверждение локального характера генерируемых в океане аномалий и, в частности, отсутствие явления адвекции («плавания») аномалий вдоль океанских течений.

Вопрос об изменчивости температуры на более низких частотах (в межгодовом и декадном интервалах) обсуждался неоднократно как на основе данных наблюдений, так и по данным моделирования в рамках моделей общей циркуляции Мирового океана. В работе [Hall, Manabe, 1997] сделан вывод о том, что во многих регионах Мирового океана изменчивость температуры происходит по закону «красного шума». В работе [Dommenges, Latif, 2002] сделан иной вывод, который, на наш взгляд, правилен исключительно с формально-статистической точки зрения. В этой работе была предпринята про-

верка применимости авторегрессионной модели первого порядка для воспроизведения изменчивости температуры океана в средних широтах. Главное отличие от краснотуманного поведения наблюдается в диапазоне межгодовой изменчивости – здесь нарастание дисперсии происходит несколько медленнее, чем это предписывается моделью авторегрессии. Следует, однако отметить, что, несмотря на то, что формальный статистический тест не преодолен, картины спектров и дисперсий получились очень близки к тем, которые предписываются авторегрессионной теорией. Аналогичный результат получен и при анализе «модельных» полей, воспроизведенных полными моделями океана и атмосферы. В то же время, использование более простых моделей, когда в модели общей циркуляции атмосферы океан представлен однородным слоем постоянной теплоемкости, показало, что в этом случае статистическая модель авторегрессии успешно применима.

Комментируя эти результаты хочется отметить, что не следует требовать от теории больше того, что она способна дать. В самом деле, по меньшей мере странно надеяться описать изменчивость поля температуры поверхности океана во всем частотном диапазоне единой моделью авторегрессии. Это вряд ли возможно, хотя бы потому, что сезонно меняется сам объект исследования – деятельный слой океана. Также не одинакова и физика процессов на разных масштабах. В этом смысле плодотворнее не заострять различия, которые и так должны быть очевидны, а наоборот, следует обратить внимание на удивительную похожесть эмпирических спектров на то, что предписывается простой теорией. Именно это сделано в первых работах данного направления [Hasselmann, 1976; Frankignoul, 1985; Frankignoul, Hasselmann, 1977], и это открывает перспективы плодотворного применения локальной статистической теории для описания и интерпретации изменчивости термического состояния океана.

Применим уравнение (3.1.2) для описания изменчивости на интервалах, существенно превышающих характерное время атмосферных синоптических явлений. Ниже будет продемонстрировано, какими преобразованиями это выражается. Пока же только заметим, что за длительное время флуктуации глубины ВКС будут происходить неоднократно и поэтому можно ввести вместо $h = h(t)$ некоторую «эффективную» глубину перемешанного слоя h_0 .

Придадим уравнению (3.2.2) более конкретный вид (Питербарг, 1989; Полонский, 1989 и др.). Для этого запишем в явном виде выражения для расчета потоков тепла. Поток явного тепла $P_s = -c_{p,a}\rho_a |\vec{u}| C (T_a - T_w) \equiv -p (T_a - T_w)$, где T_a – температура приповерхностного слоя воздуха, $c_{p,a}\rho_a$ – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении и плотность воздуха, $|\vec{u}|$ – модуль скорости ветра, C – коэффициент сопротивления. Поток скрытого тепла $LE_s \propto -\left(q_a - q^*(T_w)\right) = -f_a q^*(T_a) + q^*(T_w)$ (здесь q_a и f_a – удельная и относительная влажность воздуха, а q^* – насыщающее значение удельной влажности, выражаемое известной аналитической зависимостью – фор-

мулой Магнуса). Примем, что в приводном слое относительная влажность близка к единице. Затем, имея в виду малость отклонений значений температуры воды от температуры воздуха получаем, что $LE_S \approx -e(T_a - T_w)$ в котором e конструируется из констант формулы Магнуса. Длинноволновая составляющая радиационного бюджета поверхности вычисляется по полуэмпирическим формулам $F_a - F_s = f_q f_n \sigma T_a^4 - \sigma T_w^4$, в которых σ – постоянная Больцмана, а f_q, f_n – учитывают влияние водяного пара и облачности на встречное излучение атмосферы. Раскладывая σT_a^4 в ряд Тейлора и ограничиваясь линейным слагаемым, приблизительно получим, что $F_a - F_s \approx r(T_a - T_w)$.

Уравнение (3.1.2) принимает вид

$$\frac{dT_w}{dt} = -\lambda_T T_w + \eta. \quad (3.1.3)$$

Введя для температуры воды и метеорологических переменных сезонный ход и отклонения от него (ΔT) и выделив в η сезонную составляющую и отклонения, из уравнения (3) можно выделить уравнение для аномалий

$$\frac{d\Delta T_w}{dt} = -\lambda_T \Delta T_w + \eta, \quad (3.1.4)$$

в котором

$$\lambda_T = \left(p + e + r + c_p \rho_w \right) / h_0 \rho c_p, \quad (3.1.5)$$

$$\eta = \left(Q_0 \Delta Q (1 - \alpha) + (p + e + r) T_0 \Delta T_a - B_{h,0} \Delta B_h \right) / h_0 \rho c_p \equiv \eta_Q + \eta_T + \eta_B. \quad (3.1.6)$$

Здесь введены безразмерные величины вариаций потока суммарной солнечной радиации (ΔQ), температуры воздуха (ΔT_a) и интенсивности теплообмена за счет вовлечения вод из термоклина (ΔB_h), умноженные на соответствующие масштабные множители (обозначенные индексом «0»), оценкой которых служат соответствующие стандартные отклонения. Отметим, что факторы, учитываемые в выражении (3.1.6), на самом деле не настолько независимы друг от друга, как может показаться. В самом деле, флуктуации потока солнечного тепла определяются колебаниями облачного покрова, которые управляются теми же самыми процессами, которые вызывают колебания температуры. Эффект вовлечения вод из термоклина, хоть и параметризуется традиционно через градиент температуры в нижней части ВКС, зависит от

развития турбулентности в ВКС, то есть от скорости ветра в приводном слое, изменчивость которой определяется все теми же атмосферными процессами.

Отклонения от сезонного хода формируются различными процессами, характерные масштабы которых простираются от секунд до недель. Они включают микромасштабную турбулентность, мезометеорологические процессы (типа крупных скоплений конвективной облачности и (или) отдельных атмосферных фронтов) и синоптические процессы (волны и вихри в атмосфере, с временным масштабом в несколько суток, и пространственным масштабом в несколько сотен километров). Вносит вклад и весьма сильный детерминированный эффект суточного хода метеорологических величин. Существуют и более продолжительные явления, имеющие различный генезис, такие, как волны Маддена–Джулиана в тропиках, «двухнедельные» колебания интенсивности муссонов, «цикл индекса» в циркуляции умеренных широт и др., часто представляющие собой короткий, быстро обрывающийся, цуг аномалий. Эмпирическая автокорреляционная функция случайного процесса, порождаемого совокупностью эффектов такого рода, будет аппроксимирована, как рекомендовано во Введении, экспоненциальной зависимостью. Полное затуханием корреляции, характеризуемое «временным радиусом корреляции» (τ_r), составляет несколько суток. Оценим порядки величин, входящих в выражение (3.1.5). Имея в виду, что $p \equiv c_{p,a} \rho_a |\bar{u}| C$ и (далее в единицах системы СИ) $c_{p,a} = 10^3$ Дж/(кгК), $\rho_a = 1$ кг/м³, $|\bar{u}| = 5$ м/с, $C = 10^{-3}$, получаем, что $p \approx 5$ Вт/(Км²). Оценить e по порядку величины можно не выписывая громоздких формул. Будем исходить из того, что $e = \frac{P}{P_s / LE_s}$, а

стоящая в знаменателе величина (отношение потоков явного и скрытого тепла) есть так называемое отношение Боуэна, которое можно для качественных оценок принимать как типичную для данных условий климата величину. Над тропическими океанами оно, примерно, 0,2 (так как испарение велико), в умеренных широтах несколько больше. Исходя из этого, примем $e = 15$ Вт/(Км²). Наконец, $r = 5$ Вт/(Км²). Оценки скорости вовлечения могут быть получены по данным работы [Тужилкин, 1979], где B_h был рассчитан методом остаточного члена из уравнения притока тепла. В среднем можно принять $B_{h,0} = 50$ Вт/м² (хотя в отдельных и не так уж редких случаях возможны большие в несколько раз значения). В этом случае значение $c_p \rho_w$ можно взять приблизительно равным 10 Дж/(кгК). Для океана $\rho_c p = 4,2 \cdot 10^6$ Дж/(м³К), а h_0 примем равным 70 м, так что

$h_0 \rho c_p = 2,9 \cdot 10^8$ Дж/(м²К). В этом случае $\lambda_T = 10^{-7} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, характерное время изменчивости температуры перемешанного слоя воды (и температуры поверхности) имеет порядок $\lambda_T^{-1} = 100$ суток.

Имея в виду, что изменения температуры создаются локальным быстро флуктуирующим воздействием, уравнение (3.1.4) можно трактовать как стохастическое уравнение Ланжевена.

Как было показано ранее (см. 1.2), при нулевом начальном условии и предположении, что $\langle \eta(t) \rangle = 0$, дисперсия определяется следующим выражением:

$$\sigma_{T,st}^2 = \frac{\tau_r \sigma_\eta^2}{\lambda_T}. \quad (3.1.7)$$

Величина λ_T вычислена ранее, а σ_η^2 определяется как

$$\sigma_\eta^2 = \sigma_Q^2 + \sigma_T^2 + \sigma_B^2. \quad (3.1.8)$$

Дисперсию короткопериодных случайных воздействий можно получить по данным о наблюдаемых величинах вариаций бюджета потоков солнечной радиации, температуры и интенсивности теплообмена ВКС с термоклинном. Ясно, что эти оценки могут быть весьма различными для разного времени года и разных географических областей. Так, в полярных широтах зимой потоки солнечного тепла относительно малы, а изменения температуры воздуха (и, соответственно, воздействия на температуру океана) могут быть гораздо больше. Для приблизительных оценок можно использовать данные о характерных масштабах, введенных выше (см. (3.1.6)). Так, для баланса коротковолновой радиации примем, что $Q_0 = 100 \text{ Вт/м}^2$. В качестве оценки «масштаба температуры» используем характерную величину возможных адвективных изменений температуры за сутки при типичных скоростях ветра и горизонтальном градиенте температуры в умеренных широтах: $T_0 \approx 5\text{К}$. Масштаб вариаций теплообмена ВКС с термоклинном оценен выше при анализе наблюдаемых значений. Примем, что $\tau_r = 5$ сут, то есть на больших временах связность внутри рядов исчезает и «возбуждающая сила» представляет собой стационарный дельта-коррелированный процесс.

Подчеркнем ценность развиваемой теории: все величины, описывающие случайный процесс формирования аномалий температуры, могут быть оценены непосредственно из исходных соотношений уравнения баланса тепла. Имея это в виду, определим дисперсию стационарных флуктуаций, используя оценки λ_T и σ_η^2 . В результате получим, что $\sigma_{T,st}^2 = 1\text{К}$. По порядку эта ве-

личина соответствует данным наблюдений, более надежно она может быть скорректирована для конкретного сезона и региона.

Аналогичный рассмотренному для температуры подход может быть реализован при выводе уравнения для солености. Вместо уравнения (3.1.2) имеем

$$\frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{S_0}{h_0 \rho} (E_s - P) - \frac{\rho w (S_w - S_h)}{\rho h_0}, \quad (3.1.13)$$

в котором S_w и S_h соленость верхнего слоя и соленость ниже h_0 , S_0 – среднее значение солености слоя h_0 , поток солей между поверхностью и нижележащими слоями воды определяется разностью испарения и осадков. В качестве аналога выражения (4), запишем

$$\frac{d\Delta S_w}{dt} = -\lambda_s \Delta S_w + \xi, \quad (3.1.14)$$

в котором $\lambda_s = w/h_0$, а в последнем члене $\xi = \frac{S_0}{\rho h_0} (E_s - P + \rho_w S_h / S_0)$ собраны внешние, воздействующие на перемешанный слой, факторы. Используя определенные ранее значения, получим $\lambda_s = 0,3 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$ и характерное время изменений солености составляет $\lambda_s^{-1} = 400$ сут. Отсюда получается, что аномалии солености должны быть более долгоживущими, чем аномалии температуры. Уравнение (3.1.14) может трактоваться как стохастическое уравнение Ланжевена, описывающее медленные изменения солености под влиянием возбуждения в виде стационарного дельта-коррелированного процесса (если рассматриваются атмосферные воздействия с характерным временем корреляции, не превышающим нескольких суток).

Различия в поведении аномалий температуры и солености можно отчетливо проследить, анализируя функции спектральной плотности. Как известно, спектры «воздействия» и «отклика», соответствующие уравнениям (3.1.4) и (3.1.14), имеют вид

$$S_T = \frac{S_\eta}{\omega^2 + \lambda_T^2}, \quad S_s = \frac{S_\xi}{\omega^2 + \lambda_s^2}. \quad (3.1.15)$$

На относительно высоких частотах, где $\omega^2 \gg (\lambda_T^2, \lambda_s^2)$, спектр «отклика» пропорционален ω^{-2} («красный шум»). На низких частотах, там, где $\omega^2 \ll (\lambda_T^2, \lambda_s^2)$, спектр выполаживается. Поскольку $\lambda_T^2 > \lambda_s^2$, то выход на

плато для температурного спектра наступает на более высоких частотах, чем в случае солености. Это обстоятельство служит важным доводом (вместе с наличием красношумного характера спектра) о применимости или неприменимости локальной стохастической модели для описания изменчивости полей температуры и солености.

Рассмотрим результаты, относящиеся к северо-восточной части Тихого океана. Известно, что это относительно неактивный в динамическом отношении район. Здесь средние годовые скорости течений составляют около 0,4 см/с и практически отсутствуют вертикальные движения. На рис. 3.1.4 (а,б) сравниваются спектры, рассчитанные по данным наблюдений и по результатам модельного эксперимента. В диапазоне высоких частот их форма хорошо соответствует закономерности ω^{-2} , на низких частотах спектры стремятся к постоянной величине, причем спектр аномалий солености «краснее» – он выходит на плато на более низких частотах, чем спектр температуры. Анализ когерентности показал, что на любых частотах аномалии температуры и солености ведут себя независимо. Эти результаты позволяют утверждать, что в данном регионе (и других, родственных по характеру протекающих процессов, регионах) изменчивость полей в верхнем слое океана порождается локальным взаимодействием океана с атмосферой и хорошо может быть описана линейной стохастической теорией.

В модельном спектре [Manabe, Stouffer, 1996] выход на плато сдвинут в область более низких частот, иными словами, коэффициент затухания (λ) получился меньше, чем в реальности. Последнее обстоятельство может быть объяснено тем, что в модели океана толщина верхнего слоя задавалась не тоньше, чем 50 м, в то время как в реальном океане она могла в летние месяцы быть меньше этой величины. Другая причина заключается в том, что процессы формирования изменчивости в модельной и реальной системе океан–атмосфера протекают не совсем одинаково.

В субтропиках Северной Атлантики (район Бермуд) (рис. 3.1.4, в,г), модельная и реально наблюдающаяся изменчивость устроены по-разному. Прежде всего, в спектре, построенном по данным наблюдений, закономерность ω^{-2} не выполняется. Формирование аномалий в этом районе связано не с локальным взаимодействием атмосферы и океана, а определяется океанской циркуляцией. Она, по-видимому, неполно воспроизводится моделью – на рис. 3.1.4, г видно, что спектры ведут себя не так, как предписывает локальная теория.

Распространяя результаты, относящиеся к различным станциям погоды, на родственные по протеканию процессов регионы, можно составить представление о том, какие регионы Мирового океана не могут быть описаны с позиций локальной стохастической теории [Hall, Manabe, 1997]. Это Северная Атлантика (от границы тропиков), Южный океан (южнее 50° ю.ш.) и северо-западная часть Тихого океана (севернее 30° с.ш.), примыкающая к азиатскому материку.

Развитая в данном разделе теория может быть применена и для описания изменчивости температуры поверхности суши. Здесь принципиально то, что теплоемкость деятельного слоя суши очень мала по сравнению с случаем океана.

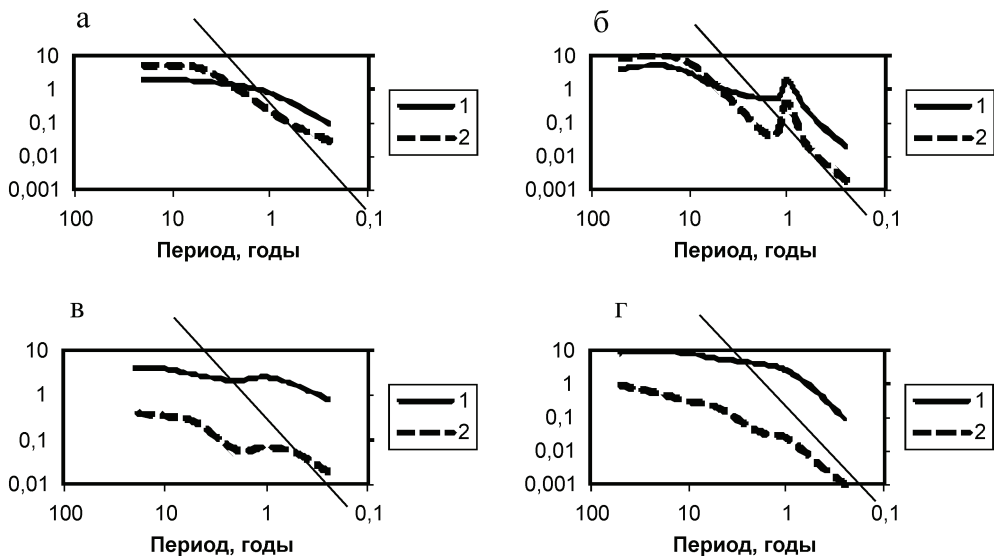


Рис. 3.1.4. Нормированные спектры колебаний температуры (1) и солёности (2) в северо-восточной части Тихого океана (а, б) и в районе Бермудских о-вов, Атлантический океан (в, г) по данным измерений (а, в) и результатам моделирования в рамках климатической модели (б, г). Прямая линия соответствует графику $\sim \omega^{-2}$.

Поэтому даже на высоких частотах $\omega^2 \ll \lambda_T^2$, так что $S_T = S_\eta / \lambda_T^2$, то есть на климатическом масштабе спектральная функция колебаний термического режима суши представляет собой белый шум.

3.2. Расчет интенсивности флуктуаций температуры поверхности океана с учетом нелокальных эффектов

Сравнение рассчитанных по (3.1.7) и наблюдаемых спектров межмесячной изменчивости ТПО по данным некоторых океанских станций [Frankignoul, Hasselmann, 1977] показало, что, несмотря на то, что качественно авторегрессионная модель первого порядка хорошо воспроизводит данные наблюдений – спектры вида (3.1.10), эмпирическое значение времени корреляции флуктуаций ТПО τ_w может существенно превосходить оценку, полученную в локальной модели взаимодействия атмосферы и океана $\tau_w = 2 \div 3$ мес. Авторы связали это с тем, что в (3.1.7) не учтены медленные изменения температуры воздуха, сопровождающие аномалии ТПО. Обработка данных кораблей погоды о межгодовых флуктуациях ТПО [Привальский, 1985] в Северной Атлантике показала, что в самой низкочастотной области спектр флуктуаций соответствует спектру процесса Орнштейна–Уленбека (3.1.10) с временем корреляции около полутора лет.

На роль взаимодействия аномалий в атмосфере и океане указывает и проведенный анализ спектров ТПО, полученных при обработке результатов численных экспериментов на совместных моделях общей циркуляции атмосферы и океана [Dommenges, Latif, 2002]. Было проведено сравнение спектров ТПО для двух типов численных экспериментов. В экспериментах первого типа (неинтерактивных) результаты моделей общей циркуляции атмосферы подавались на вход моделей ВКС типа (3.1.6), при этом рассматривались несколько версий, в том числе с учетом сезонного хода глубины ВКС и наличия второго более глубокого слоя. Оказалось, что, несмотря на количественные различия, качественно спектры ТПО удовлетворительно воспроизводятся локальными моделями типа (3.1.6). В то же время в экспериментах второго типа (интерактивных), когда проводилось интегрирование совместной модели, спектры ТПО были более низкочастотными – рост энергии флуктуаций продолжался и в области частот, где авторегрессионные модели первого порядка выходили на спектральное плато – белый шум. Этот вид спектров оказался ближе к приведенным для сравнения данным наблюдений.

В данном разделе мы покажем, каким образом учет нелокальности отклика температуры атмосферы T_a на аномалии ТПО даже в грубом приближении может существенно приблизить рассчитанные по уравнению Ланжевена спектры аномалий T_w к наблюдаемым. Для этого перейдем от представления уравнения Ланжевена в виде (2.2.13), соответствующего (3.1.7), к представлению (2.2.12). Это связано с тем, что при анализе эффектов нелокальности потребуются в явном виде выделять потоки энергии между океаном и атмосферой, горизонтальный теплообмен в атмосфере и обмен энергией с космосом – тепловое излучение системы океан – атмосфера. Для этой цели перепишем уравнение для аномалий ТПО в виде:

$$C_w \frac{d\Delta T_w}{dt} = \Delta F_{aw}, \quad C_w = \rho_w c_{pw} h. \quad (3.2.1)$$

В аномалиях потока тепла между океаном и атмосферой ΔF_{aw} , используя результаты предыдущего раздела, разделим быстрые, синоптические флуктуации и адаптированную к полю аномалий ТПО часть:

$$\Delta F_{aw}(\mathbf{r}, t) = \langle \Delta F_{aw} | \Delta T_w(\mathbf{r}', t) \rangle_{\mathbf{r}} + F'(\mathbf{r}, t). \quad (3.2.2)$$

В (3.2.2) первое слагаемое описывает более плавные, адаптированные к полю аномалий ТПО изменения потоков в точке \mathbf{r} , второе – синоптические флуктуации, для которых, согласно результатам предыдущего раздела, можно принять приближение дельта-коррелированного по времени случайного процесса. Величина $\langle F | \theta(\mathbf{r}') \rangle_{\mathbf{r}}$ есть функционал от двумерного поля аномалий ТПО, причем его вид считается в принципе известным. Он определяется осреднением по ансамблю реализаций состояния атмосферы («погод») при фиксированном поле аномалий ТПО $\theta_w(\mathbf{r}')$ [Hasselmann, 1976; Bretherton,

1982; Демченко, 1987], индекс \mathbf{r} указывает на явную зависимость от локальной горизонтальной координаты. Дискретизация по пространству разбиения (3.2.2) соответствует правой части многомерного уравнения Ланжевена (2.1.1) (эффекты «памяти» здесь не рассматриваются).

Как правило, в простых стохастических моделях аномалий ТПО зависимостью состояния атмосферы от ΔT_w пренебрегают, а ΔF_{aw} связывают с локальными изменениями ΔT_w [Frankignoul, Hasselmann, 1977; Frankignoul, 1979], выделяя их синоптические флуктуации $\Delta F_{aw}'$ (что соответствует уравнению (3.1.7)).

В простейшей модели учета аномалий температуры воздуха в формуле разбиения аномалий потоков тепла (3.2.2) правой части уравнения (3.2.1) осредненные по ансамблю «погод» аномалии потоков через границу вода–воздух связаны с локальными квазистационарными аномалиями ТПО $\theta_w(\mathbf{r})$ и $\langle \Delta T_a | \theta_w(\mathbf{r}') \rangle_{\mathbf{r}}$ – локальными адаптированными изменениями приводного воздуха [Демченко, 1987]

$$\langle \Delta F_{aw} | \theta_w(\mathbf{r}') \rangle = -\lambda_{aw} (\theta_w(\mathbf{r}) - \langle \Delta T_a | \theta_w(\mathbf{r}') \rangle_{\mathbf{r}}) - \lambda_w \theta_w(\mathbf{r}). \quad (3.2.3)$$

В (3.2.2) далее используется простая модель энергообмена (3.2.3) с подстановкой $\Delta T_w(\mathbf{r}', t)$ вместо $\theta_w(\mathbf{r}')$. Коэффициент λ_w учитывает непосредственное излучение поверхности океана в космос. Функционал $\langle \Delta T_a | \theta_w(\mathbf{r}') \rangle$ в линейном приближении можно выразить через поле аномалий ТПО

$$\langle \Delta T_a | \theta_w(\mathbf{r}') \rangle = \iint_S G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \theta_w(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3.2.4)$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ – осредненный по статистике короткопериодных атмосферных процессов отклик приповерхностной температуры воздуха в точке \mathbf{r} $\langle \Delta T_a | \theta_w(\mathbf{r}') \rangle_{\mathbf{r}}$ на аномалии ТПО $\theta_w(\mathbf{r}')$ в точке \mathbf{r}' , который должен определяться по стационарному (в среднем) отклику температурного поля атмосферы на стационарные аномалии ТПО. Нелокальность в (3.2.3) связана с тем, что осреднение по ансамблю «погод» эквивалентно (в предположении эргодичности) осреднению за достаточно большой промежуток времени. За это время атмосфера может провзаимодействовать на значительных расстояниях. По-видимому, впервые на необходимость нелокальной параметризации вида (3.2.4) обратил внимание Ф. Брезертон [Bretherton, 1982].

Для аналитического исследования влияния нелокальной связи в (3.2.3) на характеристики флуктуаций ТПО рассмотрим простейшую модель теплопереноса в атмосфере и предположим, что в первом приближении адаптирован-

ную к полю аномалий ТПО θ_w часть $\langle \Delta T_a | \theta_w \rangle$ можно рассчитать по стационарному вертикально осредненному уравнению теплопроводности

$$\chi_a \Delta_h \langle \Delta T_a | \theta_w \rangle - \lambda_a \langle \Delta T_a | \theta_w \rangle + \lambda_{aw} (\theta_w - \langle \Delta T_a | \theta_w \rangle) = 0. \quad (3.2.5)$$

Здесь Δ_h – горизонтальный оператор Лапласа, χ_a – коэффициент горизонтального турбулентного макрпереноса тепла в атмосфере. Предполагается, что при осреднении по ансамблю «погод» вертикальную структуру атмосферы можно считать заданной, а ее интегральное теплосодержание и баланс тепловой радиации на верхней границе $-\lambda_a T_a$ – функциями температуры воздуха на уровне моря. В (3.2.5) коэффициент λ_a равен коэффициенту связи «температура поверхности – уходящее в космос тепловое излучение», который в теории глобального теплового баланса планеты равняется коэффициенту B в уравнении (2.2.11). Подобные уравнения в теории климата использовались различными авторами [Адем, 1967; Петухов, 1984]. Модели, основанные на уравнении теплового баланса столба атмосферы (3.2.5), традиционно связаны в теории климата с работами Х. Адема [1967], они положили начало новому направлению в моделировании климата – созданию моделей климата промежуточной сложности. В этих моделях нет возможности (по причине грубого временного разрешения) описывать эволюцию отдельных синоптических образований в атмосфере (циклонов и антициклонов). Однако для целей построения стохастических моделей климата их использование оправдано. Поскольку в уравнении теплового баланса (3.2.5) содержатся только осредненные за достаточно большой период времени составляющие этого баланса, использование такого уравнения с точки зрения построения уравнений Ланжевена оправдано с точностью до гипотез о поведении статистически среднего отклика атмосферы на стационарное поле аномалий ТПО. Несмотря на то, что в (3.2.5) не учитывается реакция атмосферной циркуляции на аномалии ТПО, она содержит важные эффекты взаимосвязи пространственной корреляции синоптических флуктуаций потоков тепла и процессов вертикального и горизонтального переноса тепла при генерации изменчивости ТПО [Демченко, 1987]. Даже учет этих эффектов, как будет показано далее, позволяет существенно приблизить теоретически рассчитанные спектры межгодовых аномалий ТПО к оценкам по данным судов погоды [Привальский, 1985] и данным численного моделирования на моделях общей циркуляции атмосферы и океана [Dommenges, Latif, 2002].

Стохастическое эволюционное уравнение для аномалий ТПО

$$C_w \frac{\partial \Delta T_w(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\lambda_{aw} (\Delta T_w(\mathbf{r}, t) - \langle \Delta T_a(\mathbf{r}) | \Delta T_w(\mathbf{r}', t) \rangle) - \lambda_w \Delta T_w(\mathbf{r}, t) + F'_{aw}(\mathbf{r}, t) \quad (3.2.6)$$

совместно с диагностическим соотношением (3.2.5) (в котором следует положить $\theta_w(\mathbf{r}) = \Delta T_w(\mathbf{r}, t)$) и выражением для корреляционной функции синоптических флуктуаций теплового баланса на границе вода–воздух

$$\langle F'_{aw}(\mathbf{r}, t) F'_{aw}(\mathbf{r}', t') \rangle = 2\sigma_F^2 \tau_F g_{\mathbf{r}}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta(t - t') \quad (3.2.7)$$

образуют замкнутую систему для расчета вторых моментов поля аномалий ТПО. В (3.2.7) $g_{\mathbf{r}}$ – нормированная пространственная корреляционная функция ($g_{\mathbf{r}}(0) = 1$) поля синоптических флуктуаций, которое для простоты здесь предполагается статистически изотропным. Пространственная корреляционная функция изотропного (статистически) поля случайной величины (ΔT_a – в данном случае) может быть задана функцией одной переменной – модуля расстояния \mathbf{r} . И ее главное свойство не отличается от аналогичного для временной корреляционной функции: ее преобразование Фурье с поправкой на двухмерность исходного поля (формула (3.2.10)) задает распределение энергии флуктуаций по спектру масштабов: частот ω или пространственных аналогов – волновых чисел \mathbf{k} .

Далее рассматривается простейший случай расчета ТПО в открытом бесконечном бассейне с постоянными значениями вошедших в (3.2.5)–(3.2.7) параметров и пренебрегается сферичностью (\mathbf{r} – декартовы координаты). Поскольку F'_{aw} – изотропное двумерное поле, поле ΔT_w также будет изотропным. Тогда в (2.2.3)–(2.2.5) можно перейти к Фурье-представлению и стандартными методами получить связь между пространственно-временными спектрами флуктуаций ТПО $S_{\omega, \mathbf{k}}^T$ и потоков тепла $S_{\omega, \mathbf{k}}^F$

$$S_{\omega, \mathbf{k}}^T = S_{\omega, \mathbf{k}}^F \left\{ \left(C_w \omega \right)^2 + \left[\frac{(\lambda_w + \lambda_{aw})(\chi_a k^2 + \lambda_a + \lambda_{aw}) - \lambda_{aw}^2}{\chi_a k^2 + \lambda_a + \lambda_{aw}} \right]^2 \right\}^{-1}, \quad (3.2.8)$$

где \mathbf{k} – волновое число, а k – его модуль. Пространственный спектр определяется интегрированием (3.2.8) по частоте и, с учетом (3.2.7)

$$S_{\mathbf{k}}^T = \frac{g_{\mathbf{k}} \sigma_F^2 \tau_F (\chi_a k^2 + \lambda_a + \lambda_{aw})}{C_w [(\chi_a k^2 + \lambda_a + \lambda_{aw})(\lambda_a + \lambda_{aw}) - \lambda_{aw}^2]}, \quad (3.2.9)$$

а $g_{\mathbf{k}}$ – двумерное преобразование Фурье корреляционной функции, которая в изотропном случае зависит только от модуля волнового числа k (аналога

круговой частоты) и связана с пространственной корреляционной функцией прямым и обратным преобразованием Фурье

$$g_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{k} g_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad g_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-2} \int d\mathbf{r} g_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}).$$

С учетом изотропии в формулах для пространственной корреляционной функции и спектра следует перейти к полярным координатам [Рытов и др., 1978]. Тогда связь зависящих только от модуля соответствующих переменных величин можно выразить однократными интегралами, приводящим к прямому и обратному преобразованию Ганкеля. Для пространственного спектра это приводит к однократному интегралу

$$g_{\mathbf{k}}(k) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} g(\rho) J_0(k\rho) \rho d\rho, \quad (3.2.10)$$

где J_0 – нулевая функция Бесселя [Рытов и др., 1978].

Полученные соотношения позволяют рассчитать две важные характеристики флуктуаций ТПО: дисперсию σ_T^2 и время корреляции τ_T . Для частного вида $g(\rho) = \exp(-\alpha\rho^2)$ – такой вид корреляционной функции, который в данном случае удобен для получения аналитических выражений – часто используется при аппроксимации эмпирических данных [Гандин, Каган, 1976]: $g_{\mathbf{k}} = (4\pi\alpha)^{-1} \exp(-k^2/4\alpha)$ и интегрирование (3.2.9) по \mathbf{k} с учетом изотропии и (3.2.10) для интересующих нас величин дает

$$\sigma_{Tw}^2 = 2\pi \int_0^{\infty} S_k^T k dk = \sigma_{T0}^2 \left[1 + \frac{\lambda_{aw}^2}{\gamma_w \lambda_{\Sigma}} \Phi e^{\Phi} E_1(\Phi) \right], \quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned} \tau_{Tw} &= \pi \sigma_{Tw}^{-2} \int_0^{\infty} S_{0,\mathbf{k}}^T k dk = \\ &= \tau_{T0} \frac{\sigma_{T0}^2}{\sigma_T^2} \left[1 + \left(\frac{\gamma_a}{\lambda_{\Sigma}} - 1 \right)^2 \Phi \left(1 - \Phi e^{\Phi} E_1(\Phi) \right) + 2 \left(\frac{\gamma_a}{\lambda_{\Sigma}} - 1 \right) \Phi e^{\Phi} E_1(\Phi) \right]. \end{aligned}$$

В (3.2.11) E_1 – интегральная показательная функция первого порядка [Абрамовиц, Стиган, 1979]: $E_1(\Phi) = \int_{\Phi}^{\infty} \frac{e^{-z}}{z} dz$, введены следующие обозначения

$$\sigma_{T0}^2 = \frac{\sigma_F^2 \tau_F}{C_w \gamma_w}, \quad \tau_{T0} = \frac{C_w}{\gamma_w}, \quad (3.2.12)$$

$$\gamma_w = \lambda_w + \lambda_{aw}, \quad \gamma_a = \lambda_a + \lambda_{aw}, \quad \lambda_\Sigma = \frac{\gamma_a \gamma_w - \lambda_{aw}^2}{\gamma_w},$$

а также важный безразмерный параметр

$$\Phi = \frac{\lambda_\Sigma}{4\alpha\chi_a}. \quad (3.2.13)$$

Величины σ_{T0}^2 и τ_{T0} совпадают с выражениями для дисперсии и времени корреляции флуктуаций ТПО, полученными без учета зависимости ΔT_a от ΔT_w [Frankignoul, Hasselmann, 1977] (с добавлением к λ_{aw} малого слагаемого λ_w). По анализу модели при $\lambda_{aw} \gg \{\lambda_a, \lambda_w\}$ (что имеет место в действительности) параметр $\gamma_\Sigma \approx \lambda_a + \lambda_w$ совпадает с коэффициентом обратной связи B (температура поверхности – тепловое излучение в космос) в уравнении Ланжевена (2.2.12), возникающем при определении чувствительности нуль-мерных энергобалансовых моделей и определяющим поведение спектра флуктуаций средней глобальной температуры в низкочастотной области [Diskinson, 1981; Демченко, 1989].

Параметр Φ пропорционален квадрату отношения двух масштабов: $\Phi = r_k^2 / \pi r_\chi^2$, где r_k – радиус корреляции поля F_{aw}' , а $r_\chi \sim (\chi_a / \lambda_\Sigma)^{1/2}$ – характерное расстояние, на котором затухают температурные возмущения, вызванные стационарными аномалиями притоков тепла в рассматриваемой простой модели теплопереноса в атмосфере. Это расстояние увеличивается с увеличением интенсивности горизонтального макропереноса в атмосфере и уменьшается с увеличением скорости релаксации температурных возмущений за счет излучения энергии в космос.

Формулы (3.2.11), (3.2.13) для дисперсии и времени корреляции аномалий ТПО являются основным результатом этого раздела. Их асимптотики имеют ясный физический смысл.

Случай $\Phi \gg 1$. Этот случай соответствует малым r_χ (или большим r_k).

Поскольку $E_1(\Phi \gg 1) \approx \exp(-\Phi)(1/\Phi - 1/\Phi^2)$,

$$\sigma_{TW}^2 = \frac{\sigma_F^2 \tau F}{C_w \gamma_w} \Lambda \approx \sigma_{T0}^2 \frac{\lambda_{aw}}{\lambda_a + \lambda_w}, \quad \tau_{TW} = \frac{C_w}{\gamma_w} \Lambda \approx \tau_{T0} \frac{\lambda_{aw}}{\lambda_\Sigma}, \quad (3.2.14)$$

$$\Lambda = \frac{\gamma_a}{\lambda_\Sigma} \approx \frac{\lambda_{aw}}{\lambda_\Sigma}$$

В этом случае теплопроводность не успевает «растаскивать» температурные аномалии в атмосфере из областей, где аномалии ТПО скоррелированы между собой. Тем самым ΔT_w флуктуирует так, как будто атмосфера над областью аномалии теплоизолирована от соседних областей. Тогда ΔT_w вызывают сильные локальные изменения ΔT_a того же знака, которые экранируют контактный теплообмен и уменьшают эффективный параметр чувствительности с $\gamma_{\text{eff}} = \gamma_w$ до $\gamma_{\text{eff}} = \lambda_\Sigma \gamma_w / \gamma_a \approx \lambda_a + \lambda_w$, увеличивая σ_{TW}^2 и τ_{TW} .

Случай $\Phi \ll 1$. Этот случай соответствует большим r_χ (или малым r_k), для него можно пользоваться асимптотикой $E_1(\Phi \ll 1) \approx \ln(1/\Phi) - C$ (где $C=0,577\dots$ – постоянная Эйлера). Здесь возможны два варианта. Если λ_Σ – конечная величина, то при $\Phi \ll 1$ (3.2.11) переходит в $\sigma_{TW}^2 = \sigma_{T0}^2$, τ_{TW} и совпадают с выражениями, полученными без учета зависимости ΔT_a от ΔT_w . Если же стремление Φ к нулю происходит за счет уменьшения λ_Σ при неизменных γ_a и r_k дисперсия σ_{TW}^2 растет, как, $\ln(1/\lambda_\Sigma)$, что означает нарастание флуктуаций при приближении системы океан–атмосфера к границе устойчивости. Тот факт, что при $\Phi \ll 1$ (и конечных λ_Σ) изменения ΔT_a слабо влияют на флуктуации ΔT_w объясняется тем, что горизонтальный перенос тепла в атмосфере $\chi_a \Delta_h(\Delta T_a) \sim \chi_a / r_k^2 \sim \Phi^{-1}$ (в рамках рассматриваемой модели). Поэтому при $\Phi \ll 1$ низкочастотные аномалии ΔT_a эффективно «растаскиваются» в атмосфере и не дают вклада в контактный теплообмен.

В заключение данного раздела приведем оценку влияния горизонтального переноса тепла в ВКС на интенсивность флуктуаций ТПО. Рассматривая области, удаленные от интенсивных течений, добавим в правую часть уравнения (3.2.1) для эволюции ΔT_w член $\chi_w \Delta_H(\Delta T_w)$, где $\chi_w = C_w k_w$ – коэффициент горизонтальной турбулентной теплопроводности (k_w – кинематический коэффициент турбулентной теплопроводности). Новое выражение для

$S_{\omega k}^T$ будет отличаться от (2.2.6) только заменой γ_w на $\gamma_w = \gamma_w + \chi_w k^2$.
 Формула для σ_T^2 особенно просто выглядит в случае $\Lambda = \gamma_a / \lambda_\Sigma \gg 1$, который соответствует действительности,

$$\sigma_{T_w}^2 = \frac{\sigma_{T0}^2}{1+\varepsilon} \left[\Lambda \Phi e^{\Delta/(1+\varepsilon)} E_1\left(\frac{\Phi}{1+\varepsilon}\right) + \frac{\Phi_w}{1+\varepsilon} e^{\Phi_w} E_1(\Phi_w) \right], \quad (3.2.15)$$

где $\varepsilon = \chi_w / \chi_a$, $\Phi_w = \lambda_{aw} (1+\varepsilon) / 4\alpha\varepsilon$. При $\varepsilon \ll 1$ (3.2.15) переходит в (3.2.11). Как и следовало ожидать, усиление теплопереноса в океане уменьшает дисперсию ТПО. Однако на самом деле $\varepsilon \ll 1$. Например, выбирая в качестве оценки $k_w = 3 \cdot 10^4 \text{ м}^2/\text{с}$ [Манабе, Брайан, 1972], получим $\varepsilon = 0.03$. Как показали расчеты по (2.2.13), при $\varepsilon < 0.1$ уменьшение дисперсии из-за горизонтального оттока тепла в океане не превышает 2%. Разумеется, эти оценки перестают быть справедливыми в областях сильных струйных течений. Также в этих оценках отсутствуют эффекты вертикального перемещения нижней границы ВКС, о которых упоминалось в разделе 3.1.

Вклад низкочастотного отклика аномалий температуры воздуха на аномалии ТПО в изменчивость последней, согласно (3.2.11), (3.2.13), определяется безразмерным параметром Φ . Для численных значений входящих в теорию величин примем значения: $C_w = 3,2 \text{ Дж/м}^2\text{К}$, $\lambda_{aw} = 45 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ [Diskinson, 1981; Демченко, 1989]. Последнее значение близко к рекомендуемой по эмпирическим данным величине [Frankignoul, Hasselmann, 1977]. Поскольку $\lambda_{aw} \gg \{\lambda_a, \lambda_w\}$, положим, как и ранее, $\gamma_a \approx \gamma_w \approx \lambda_{aw}$, $\lambda_\Sigma \approx \lambda_a + \lambda_w \approx 1,8 \text{ Вт/м}^2\text{К}$. В таблице 3.2.1 для различных Φ представлены значения рассчитанных по теории дисперсий и времени корреляции флуктуаций ТПО, нормированных на их оценки по модели без учета зависимости ΔT_a от ΔT_w . Из таблицы видно, что даже при небольших значениях Φ компенсирующие изменения температуры воздуха приводят к существенному увеличению $\sigma_{T_w}^2$ и τ_{T_w} .

Таблица 3.2.1. Рассчитанные дисперсии и времена корреляции флуктуаций ТПО, нормированные на их оценки по модели без учета зависимости ΔT_a от ΔT_w

Φ	0	0,001	0,01	0,1	1	10
$\sigma_{T_w}^2 / \sigma_{T0}^2$	1	1,2	2,0	6,0	15,9	23,5
τ_{T_w} / τ_{T0}	1	1,7	4,5	10,1	17,8	24,4

В рассматриваемой модели временной спектр аномалий ТПО $S_{\omega}^T(\omega)$ связан со спектром $S_{\omega}^{T0}(\omega)$, рассчитанным без учета адаптированных низкочастотных изменений температуры воздуха, соотношением

$$S_{\omega}^T(\omega) = S_{\omega}^{T0}(\omega) [(\omega\tau_{T0})^2 + 1] \Phi \int_0^{\infty} \frac{e^{-\Phi x} (x + \Lambda)^2}{(x + \Lambda)^2 (\omega\tau_{T0})^2 + (1 + x)^2} dx, \quad (3.2.16)$$

где $\Lambda = \gamma_a / \lambda_{\Sigma} \gg 1$, а $\omega\tau_{T0}$ – безразмерная круговая частота. Рассчитанные спектры флуктуаций ТПО (обезразмеренного на $\sigma_{T0}^2 \tau_{T0}$) от безразмерной частоты при различных Φ приведены на рис. 3.2.1.

При $\omega\tau_{T0} \gg 1$ все спектры выходят на соответствующую асимптотику спектра красного шума и совпадают по величине. Однако по мере увеличения Φ доля низкочастотной изменчивости возрастает и спектры становятся более похожими на полученные в результате интегрирования совместной модели общей циркуляции атмосферы и океана [Dommenges, Latif, 2002].

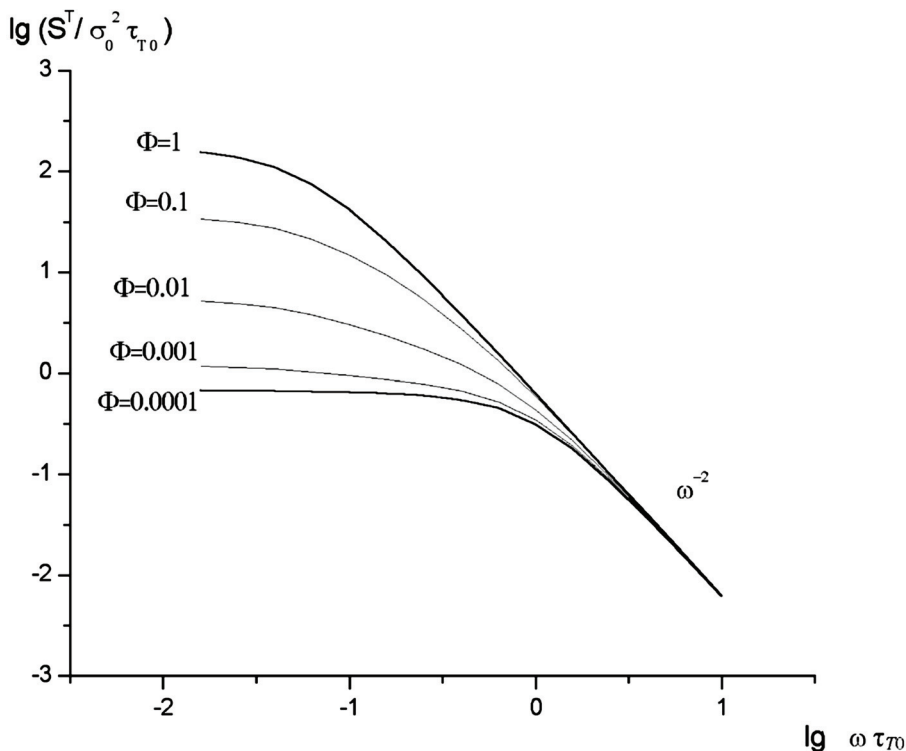


Рис. 3.2.1. Безразмерные спектры флуктуаций ТПО при различных Φ по (3.2.16).

Значение Φ , соответствующее реальному климату, зависит от коэффициента χ_a , который связан с кинетическим коэффициентом макротурбулентного горизонтального обмена теплом в атмосфере k_a соотношением:

$$\chi_a = k_a \frac{C_a}{a} \quad (C_a - \text{теплоемкость атмосферного столба единичного сечения}).$$

Принимая оценку $k_a = 3 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$ [Адем, 1967] при $C_a = 10^7 \text{ Дж/м}^2\text{К}$ [Discinson, 1981] и характерном значении $r_k \approx 1000 \text{ км}$ получим значение $\Phi = 0,02$ [Демченко, 1987].

Несмотря на то, что $\Phi \ll 1$ – малый параметр, безразмерный критерий интенсивности теплового взаимодействия между атмосферой и океаном $\Lambda \gg 1$. При выбранных ранее значениях параметров взаимодействия $\Lambda \approx 25$, но тем не менее $\Phi \Lambda \approx 0,5$ – величина порядка единицы. Именно этот факт не был учтен в простых локальных стохастических моделях аномалий ТПО. Анализ формулы (3.2.16) показывает, что именно произведение $\Phi \Lambda$ определяет поведение спектра ТПО в самой низкочастотной области. Отсюда понятно и поведение кривых на рис. 3.1.1, когда даже при малых $\Phi = 0,1 \div 0,01$ происходит значительное увеличение спектров вблизи нулевой частоты.

На рис. 3.2.2 приведены результаты расчета обобщенных спектров аномалий ТПО (нормированных на дисперсию), построенных по (2.3.1) при $\Phi = 0,02$, $\Lambda = 25$, $\tau_{T_0} = 0,2 \text{ год}$ (кривая 1). Для удобства круговая частота ω заменена на принятую в представлении результатов эмпирической обработки спектров – обратный период – $\nu = \omega / 2\pi$. С отличием этих частот часто совершается путаница при интерпретации опубликованных в литературе спектров, аналогичных (2.2.16) (спектров процесса Орнштейна–Уленбека). Также приведен обобщенный спектр при отсутствии реакции атмосферы (кривая 3). Для сравнения приведен обобщенный спектр межгодичных флуктуаций ТПО в Северной Атлантике, полученный по данным судовых наблюдений на кораблях погоды [Привальский, 1985]. Поскольку этот спектр соответствует авторегрессионной модели с дискретным временем $T_i = aT_{i-1} + T'_i$, на рисунке он аппроксимирован спектром процесса Орнштейна–Уленбека и для приведенной эмпирической модели с непрерывным временем соответствует модели с непрерывным временем с $\tau_{TW} = -\ln(0,5) \approx 1,4 \text{ года}$.

На рисунке видно, что спектр, рассчитанный по модели с учетом зависимости ΔT_a от ΔT_w , близок к его эмпирической оценке. В то же время по форме он отличается от спектра авторегрессии первого порядка большей концентрацией энергии на низких частотах. Это свойство спектров ТПО было отмечено и по другим данным как численного моделирования, так и наблюдений [Dommengat, Latif, 2002].

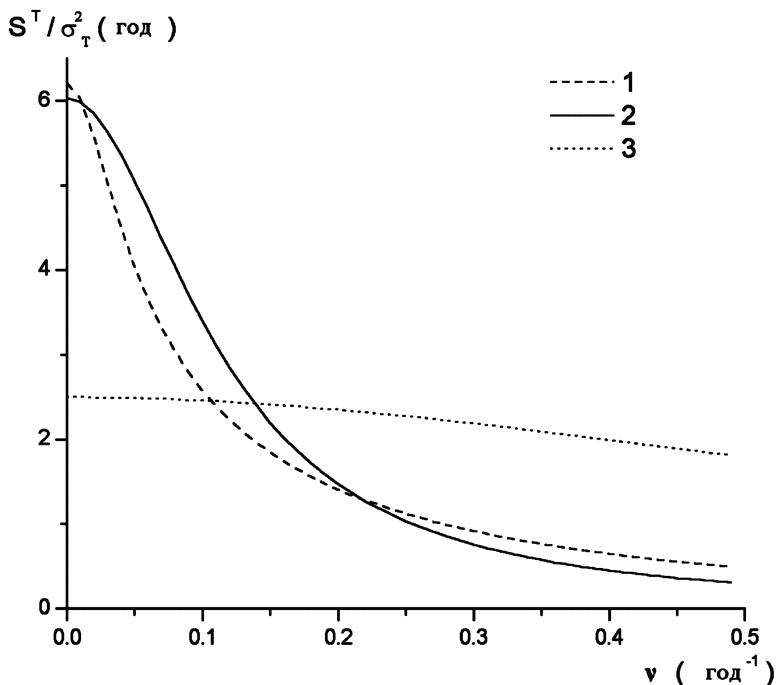


Рис. 3.2.2. Обобщенные спектры аномалий ТПО.

Кривая 1 – расчет по (3.2.6) при $\Phi=0,02$, $\Lambda=25$, $\tau_{w0}=0,2$ год. Кривая 3 – обобщенный спектр при отсутствии реакции атмосферы. Для сравнения приведен обобщенный спектр межгодовых флуктуаций ТПО в Северной Атлантике (кривая 2), полученный по данным судовых наблюдений на кораблях погоды [Привальский, 1985].

3.3. Динамика горных ледников

Горные ледники представляют собой движущиеся естественные скопления льда на земной поверхности. Они образуются из твердых атмосферных осадков в тех районах, где их в течение года отлагается больше, чем тает и испаряется, то есть там, где удобные по характеру рельефа участки земной поверхности располагаются вблизи климатической снеговой границы. Для каждого ледника определяется так называемая фирновая снеговая линия, положение которой меняется год от года. Ее положение разделяет поверхность ледника на область питания, где происходит аккумуляция снежного покрова и его превращение в лед, и область абляции, где преобладает стайвание и испарение льда. В области питания свежий выпадающий снег постоянно перекрывает существовавший ранее снежный покров, который, погружаясь внутрь ледника постепенно превращается в фирн – пористую массу ледяных зерен, а затем в лед.

Следует подчеркнуть, что наличие самостоятельного движения является принципиальной особенностью ледника [Калесник, 1963]. Данное обстоятельство, когда область притока и стока массы разнесены в пространстве, обуславливает то, что ледник может существовать как единый, целостный объект только за счет постоянного перемещения льда из области питания в

область абляции. Здесь аккумулятивная масса расходуется путем испарения, таяния и стока талой воды и (или) механически удаляется в виде айсбергов или обвалов. Таким образом, модель ледника логично должна строиться на основе трехмерной динамики вязко-пластичного тела (см. например [Reichert et al., 2002]). Однако этот подход сложен, причем главным образом из-за того, что отсутствует надежная информация о параметрах ледника (распределения плотности вещества в теле ледника и его состояния (вода–снег–фирн–лед), о тензоре напряжений и др.) а также об особенностях подстилающих ледник горных породах и рельефе, которые прихотливо меняются от одного ледника другому.

Поэтому широкое развитие получили гораздо более простые, интегральные (то есть не имеющие пространственного разрешения) модели ледников, которые, несмотря на простоту, оказываются способны воспроизвести многие важные аспекты динамики ледников. В этих моделях основным параметром выступает длина ледника (L), или радиус, если речь идет о ледниковом щите. Такой подход возможен только в том случае, если предполагается, что рассматриваются достаточно протяженные интервалы времени, в течение которых вариации баланса массы уравниваются динамикой льда, приводя ледник к определенному равновесному профилю. При этом объем ледника, его протяженность и мощность связываются между собой простыми соотношениями и возможно построение моделей, которые иногда называют из-за их упрощенности «минимальными моделями» [Oerlemans, 2008]. Данный подход, несмотря на декларируемую упрощенность, весьма удобен, потому что позволяет вычислять величины, адекватные тем, которые наблюдаются при стандартных гляциологических исследованиях. Среди них наиболее простой и массово определяемой является длина ледника, определяемая фактически вариациями высоты его нижней границы.

Базовым при построении модели ледника является уравнение сохранения массы, которое в интегральном виде записывается следующим образом:

$$\frac{dV}{dt} = \int \dot{b} dx dy + C, \quad (3.3.1)$$

где t – время, x и y – горизонтальные координаты, V – объем ледника (предполагается, что плотность льда постоянна, так что рассмотрение массы и объема эквивалентны друг другу), \dot{b} есть алгебраическая сумма притоков и оттоков массы (выраженная в метрах водного эквивалента) с горизонтальной поверхности (практически совпадающей с поверхностью ледника в силу типично малого уклона поверхности) за определенный промежуток времени (удобно брать годовой период), C – изменение массы за счет потоков на границе ледника (образование айсбергов и др.).

Зона питания ледника определяется как область, где $\dot{b} > 0$. Здесь снег лишь частично стает (или испаряется) в летнее время. Область, где $\dot{b} < 0$ характеризует зону абляции, в которой в теплый период года наблюдается таяние не только накопившегося за зиму снега, но и самого тела ледника. Питание ледника атмосферными осадками, таяние и айсберговый сток происходит под влиянием метеорологических процессов. Они включают, в интересующем нас масштабе временных изменений, вариации сезонного и суточно-

го масштаба, а также синоптические изменения. При этом накопление или потеря воды ледником представляет собой непосредственную реакцию на метеорологические процессы, происходящую без какого-либо запаздывания.

Зависимость \dot{b} от высоты в принципиальном плане понятна – отрицательные значения в зоне абляции должны смениться положительными в зоне аккумуляции. Для иллюстрации рассмотрим рис. 3.3.1, где отдельными кривыми для нескольких лет представлена информация по леднику Urumqihe S. No 1, восточная ветвь (Китай, Тянь-Шань). Можно отметить, что в целом названная зависимость имеет место, но характер профиля получается достаточно сложным.

У некоторых ледников зависимость баланса массы от высоты близка к линейной. На рис. 3.3.2 продемонстрирована средняя за много лет (несколько первых десятков) зависимость баланса массы от высоты для некоторых ледников [Oerlemans, 2008; Кунахович и др., 1996]. Кроме того, данные кривые маркируют диапазон высот, в котором в конкретных горных системах расположены ледники. Стабильное существование горного оледенения возможно в аридном климате субтропического пояса на гораздо больших высотах (ледники Абрамова и Туяксу), чем в умеренном поясе (Peuto Glacier и Hintereisferner) и морском субарктическом поясе (Nigardsbreen).

На кривые баланса массы, главным образом на абляцию, оказывает влияние моренный покров, если он существует. По мнению В.В.Поповнина (част. сообщ.), этот эффект не только существенно нелинеен, но и знакопеременен. Дело в том, что сначала из-за эффекта зачернения поверхности твердообломочным материалом, переносимым ледником, таяние увеличивается, однако с нарастанием толщины «крышки», происходит изоляция льда от контакта с атмосферой и существенное снижение скорости таяния. Данный эффект существенно искажает линейный характер кривых зависимости «баланс массы – высота». Отметим, что у ледников, отобранных на рис. 3.3.2, поверхность достаточно чистая.

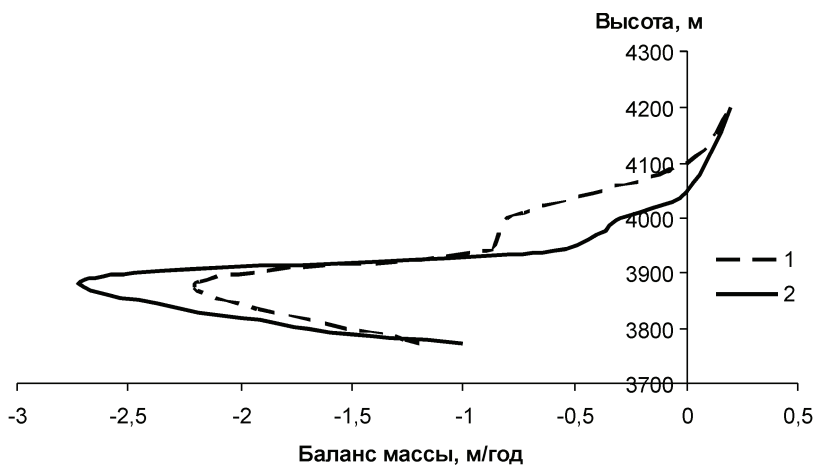


Рис. 3.3.1. Скорость изменения баланса массы как функция высоты ледника Urumqihe S. No 1, восточная ветвь (Китай, Тянь-Шань) для отдельных лет 1 – 2003–2004, 2 – 2004–2005 гг. [Glacier mass ..., 1994, 2007].

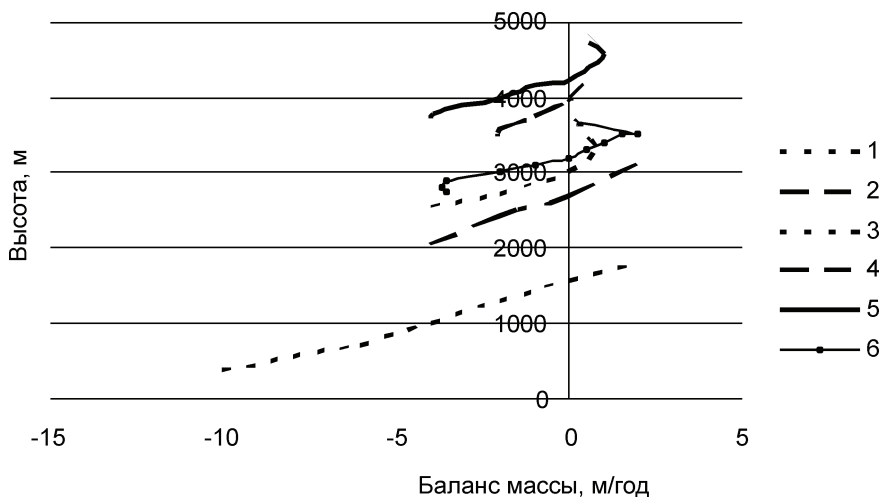


Рис. 3.3.2. Скорость изменения баланса массы как функция высоты некоторых ледников

1 – Nigardsbreen (Норвегия), 2 – Peyto Glacier (Скалистые Горы, Канада), 3 – Hintereisferner (Австрия), 4 – Туяксу (Казахстан), 5 – ледник Абрамова (Таджикистан), 6 – Джанкуат (Кавказ)

Вариации баланса массы определяются сезонным распределением метеорологического режима. В качестве характеристики рассмотрим чувствительность ледника, определяемую как зависимость баланса массы от аномалий температуры и осадков месячного масштаба. Эти значения могут быть рассчитаны на основе данных наблюдений индивидуально для каждого ледника. Рассматриваемые характеристики представлены на рис. 3.3.3 для двух ледников Nigardsbreen и Rhonegletscher [Oerlemans, Reichert, 2000].

Ледник Nigardsbreen расположен на Скандинавском полуострове, на сравнительно небольшой высоте (ниже 2 км). Здесь во время теплого сезона наблюдается высокая термическая чувствительность, то есть аномалии летних температур могут вносить большой вклад в баланс массы. В то же время изменения зимних температур практически не играют роли, поскольку они редко поднимаются выше нуля и таяние не происходит. Чувствительность баланса массы к относительным изменениям осадков очень мала летом, поскольку обильные осадки этого времени года представлены дождями. Серьезный вклад в баланс вносят зимние снегопады. Ледник Rhonegletscher расположен в Альпах на гораздо большей высоте (2,1–3,6 км). Фон низких температур обеспечивает то, что значительный вклад в баланс массы вносят не только зимние, но и летние осадки, выпадающие преимущественно в виде снега. Что касается чувствительности к вариациям температуры, то здесь она в целом ниже, чем у ледника Nigardsbreen.

В условиях высокогорья, холодной, сухой и солнечной погоды важную роль в балансе массы играет эффект возгонки, когда водяной пар переходит из твердого состояния в газообразное.

Построим, следуя работе [Oerlemans, 2008], модель ледника. Будем рассматривать простую, но часто наблюдаемую ситуацию, когда однородный

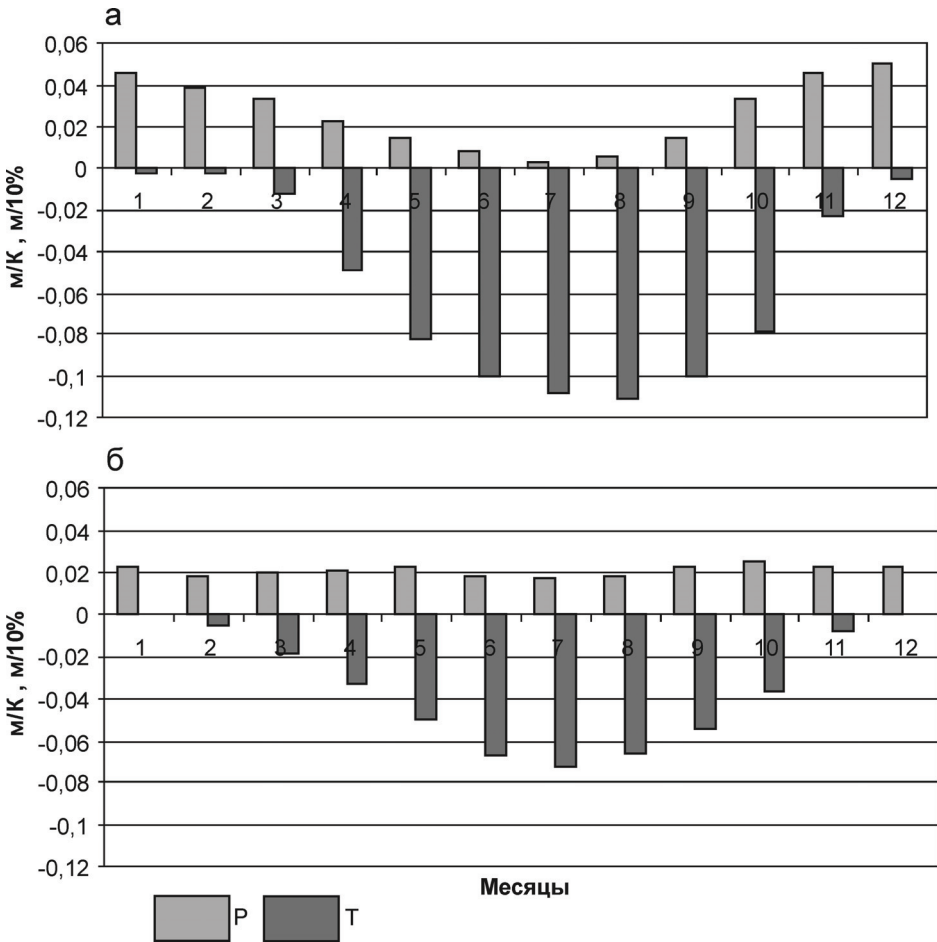


Рис. 3.3.3. Чувствительность к месячным аномалиям температуры (масса водного эквивалента)/К и аномалиям месячных сумм осадков (масса водного эквивалента)/(10% аномалия) баланса массы ледников Nigardsbreen (а) и Rhonegletscher (б)

(по плотности) ледник расположен на склоне с постоянным наклоном (ν), то есть в одномерном случае положение склона задается как

$$b(x) = b_0 - \nu x, \quad (3.3.2)$$

где x – горизонтальная координата, а b_0 – высота, на которой располагается верхняя точка ледника.

Бюджет массы представлен линейной зависимостью (рис. 3.3.2), то есть

$$\dot{b} = \beta(h - E). \quad (3.3.3)$$

Эта аппроксимация сразу сужает применимость реализованного ниже подхода он неприменим в тех случаях, когда линейная функция не примени-

ма (см. рис. 3.3.1). Здесь h отсчитывается от уровня моря и E есть высота, на которой существует равновесие прихода и расхода массы данного ледника. Высота E обозначает определенную выше фирновую линию, которая определяется для изучаемых ледников в каждый отдельно взятый год. Результатом ее многолетнего осреднения служит представление о климатической снеговой линии, обрисовывающей тот нижний гипсометрический уровень, выше которого часть зимнего снега не исчезает летом.

Размерность β такова – в числителе стоит метр водного эквивалента, а в знаменателе – произведение (метр·год), то есть получается фактически, 1/год. Мощность ледника (толща льда над склоном) описывается выражением $H(x) = h(x) - b(x)$.

Сформулируем уравнение, описывающее динамику ледника во времени. Для этого используем уравнение (3.3.1). Будем рассматривать ледники, которые не относятся к классу пульсирующих, априорно «снабженных» специфическим набором условий, порождающим своеобразный автоколебательный режим эволюции. Также не будем пока включать в рассмотрение те ледники, которые обрываются в море или большие озера, у которых сток массы в большей или меньшей степени обусловлен отколом айсбергов.

Для одномерного случая, используя выражение $V = H_m L$, связывающее объем, длину и среднюю по профилю толщину ледника (H_m), получим

$$\frac{dV}{dt} = H_m \frac{dL}{dt} + L \frac{dH_m}{dt}. \quad (3.3.4)$$

Можно предположить, что если ледник находится в состоянии равновесия, то между H_m и L должна существовать однозначная связь. Действительно, анализ большого числа натуральных данных и результатов численных расчетов по полным трехмерным динамическим моделям показал, что $H_m \sim L^k$, $k=0,4-0,45$, причем большие величины типичны для склонов с меньшими уклонами.

С другой стороны, подобная степенная зависимость легко получается из следующих соображений. Если рассматривать ледник как идеально пластичное тело, расположенное на наклонной поверхности, то в стационарном состоянии осуществляется баланс сил тяжести и касательного напряжения (принимаемого равным пределу текучести τ_0). Тогда условие равновесия будет иметь вид $\rho g H |dH/dx| = \tau_0$ [Паттерсон, 1984]. Решая это дифференциальное уравнение, можно получить выражение $H \sim \sqrt{x}$, а отсюда следует зависимость для средней высоты $H_m \sim \sqrt{L}$. Близость приведенных выше эмпирически определенных значений показателя степени k к $1/2$ позволяет считать, что приближение идеальной пластичности льда является успешным и может быть использовано при построении упрощенной модели. Поэтому в

дальнейшем будем использовать следующую полуэмпирическую формулу, связывающую длину и среднюю высоту ледника

$$H_m = \frac{\alpha\sqrt{L}}{1 + \mu\nu}, \quad (3.3.5)$$

в которой α и μ – константы, служащие параметрами конкретного ледника.

Подставляя (3.3.5) в (3.3.4), и, используя представление о том, что объем ледника зависит от баланса массы (см. (3.3.1)), получаем

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2(1 + \mu\nu)}{3\alpha\sqrt{L}} B, \quad (3.3.6)$$

в котором

$$B = \int_0^L \dot{b} dx = \beta \int_0^L (H + b_0 - \nu x - E) dx = -0.5\beta\nu L^2 + \beta \left(\frac{\alpha\sqrt{L}}{1 + \mu\nu} + b_0 - E \right) L. \quad (3.3.7)$$

Объединяя выражения (3.3.6) и (3.3.7), получим

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2(1 + \mu\nu)}{3\alpha} \left(-0.5\beta\nu L^{3/2} + \frac{\alpha\beta}{1 + \mu\nu} L + \beta(b_0 - E)L^{1/2} \right). \quad (3.3.8)$$

Разделим каждое слагаемое на \sqrt{L} и запишем уравнение в более удобной форме относительно новой переменной $y = \sqrt{L}$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{(1 + \mu\nu)\beta\nu}{6\alpha} y^2 + \frac{\beta}{3} y + \frac{(1 + \mu\nu)\beta(b_0 - E)}{3\alpha}. \quad (3.3.9)$$

Данное уравнение описывает динамику ледника за счет внешних воздействий, которые сосредоточены в величине E , зависящей от вариаций теплового и водного баланса ледника. Допущения, сделанные при выводе уравнения (3.3.9), могут быть в значительной степени ослаблены даже в рамках рассматриваемого упрощенного подхода. Так, достаточно просто учесть меняющуюся вдоль профиля ширину ледника (это достигается введением в рассмотрение двух (нескольких) участков долины, содержащей ледник, ширина которых нормируется и включается в уравнение бюджета массы. Таким же способом можно ввести и более реалистичское описание переменной наклона днища долины и избавиться от некоторых других упрощений. Главным по-прежнему остается идея о том, что ледник всегда имеет строго определенную форму, что позволяет отказаться от явного учета динамики льда и рассматривать длину ледника в качестве единственной переменной.

Уравнение (3.3.9) может быть существенно упрощено, если учесть, что вариации длины ледников весьма малы по сравнению с его средними размерами. Действительно, если характеризовать отклонения от среднего величиной стандартного отклонения, нормированного на среднее значение, то, по данным непосредственных измерений в XX веке, эта величина составляет 8%

для ледника Nigardsbreen, 4% для ледника Glacier de Bosson, 5% для ледника Brikdalsbreen (Норвегия), 19% для ледника South Cascade Glacier (США) и т.д. Причем подчеркнем, что были использованы данные в том числе и последних десятилетий, когда наблюдается отчетливый отрицательный тренд в размерах ледников (кроме Скандинавских), связанный с глобальным потеплением климата (IPCC). Таким образом, предложение о малости изменений может быть принято. Отметим, что малость изменений в данном случае представляется естественным, физически обоснованным требованием, поскольку это подразумевает, что, несмотря на изменения, мы продолжаем работать с тем же объектом. В этом случае уравнение (3.3.9) может быть линеаризовано относительно среднего (равновесного) значения, то есть принимается, что $y = y_0 + \Delta y$ и $E = E_0 + \Delta E$. В этом случае имеем

$$\frac{d\Delta y}{dt} = -(2ay_0 - b)\Delta y - cE_0\Delta E, \quad (3.3.10)$$

в котором введен масштаб изменений высоты равновесия (E_0), ΔE представляет собой безразмерную величину, а остальные величины описываются следующим образом:

$$a = \frac{(1 + \mu\nu)\beta\nu}{6\alpha}, \quad b = \frac{\beta}{3}, \quad c = \frac{(1 + \mu\nu)\beta}{3\alpha}.$$

Коэффициенты в уравнении (3.3.10) есть параметры конкретного ледника. Например, для альпийского ледника Aletschgletscher (расположенного в Бернских Альпах, в горном массиве Юнгфрау) имеет место следующий набор констант [Oerlemans, 2008]: $b_0 = 3900$ м, $\mu = 10$, $\nu = 0,1$, $\alpha = 3$ м^{1/2}, $\beta = 0,007$ 1/год, $L_0 = 22000$ м. Соответственно, $2ay_0 = 0,023$ и $b = 0,002$ год⁻¹, $c = 0,002$ год⁻¹ м^{-1/2}.

Выражение $(2ay_0 - b)^{-1}$ представляет собой оценку характерного времени динамики ледника. Для рассматриваемого ледника получается величина порядка 50 лет.

Норвежский ледник Nordenskiöldbreen расположен гораздо ниже (относительно уровня моря) и в другой климатической зоне. Для него $b_0 = 1050$ м, $\mu = 10$, $\nu = 0,04$, $\alpha = 2,5$ м^{1/2}, $\beta = 0,006$ 1/год, $L_0 = 23800$ м. Здесь $2ay_0 = 0,0069$ и $b = 0,002$ год⁻¹, а $c = 0,001$ год⁻¹ м^{-1/2}. Характерное время динамики ледника $(2ay_0 - b)^{-1}$ составляет порядка 200 лет.

В уравнении (3.3.10) нестабильность высоты линии равновесия (ΔE) порождает короткопериодные вариации длины ледника, которые интегрируются медленной инерционной системой горного оледенения. Вариации клима-

тической снеговой границы вызываются совместным влиянием изменений составляющих теплового и водного балансов. Продемонстрировать данную связь можно весьма наглядно, если предположить, что изменения линии равновесия определяются исключительно термическими причинами – в этом случае снеговая граница совпадает с определенной изотермой и следует за ее межгодовыми изменениями. При этом ледник из-за большой инерционности (определяемой характерным временем его изменений) не успевает подстраиваться под меняющийся режим, создаются эффекты запаздывания реакции и «накопления» флуктуаций.

Изменения высоты линии равновесия определяются вариациями теплового и водного баланса, создающего приращение объема ледника. Анализ данных наблюдений годовых приращений объема большого количества ледников, расположенных в различных климатических зонах, позволил установить, что для почти всех случаев хорошим приближением служит модель белого шума [Добровольский, 2002]. Сочетание «белошумного» быстро флуктуирующего воздействия с медленным изменением всей системы можно трактовать как физическое обоснование применимости к рассматриваемому явлению эволюции горного ледника модели броуновского движения, а уравнение (3.3.10) в этом случае трактуется как стохастическое дифференциальное уравнение Ланжевена.

Чтобы получить представление о статистических свойствах динамики ледника, описываемой уравнением (3.3.10), определим функцию корреляции флуктуаций в форме быстро убывающей экспоненциальной функции (считая, что связность между аномалиями становится мала за пределами радиуса корреляции τ_r , то есть $\tau_r \ll \lambda^{-1}$):

$$c^2 E_0^2 \langle \Delta E(\xi) \Delta E(\eta) \rangle = \sigma_\eta^2 \exp(-|\xi - \eta|/\tau_r). \quad (3.3.11)$$

Чтобы использовать теорию, изложенную в разделе 1.2, следует определить параметры, входящие в данное выражение. Как было показано выше, годовые приращения практически не коррелируют между собой на масштабах, превышающих год, поэтому примем, что $\tau_r = 1$ год. Определение масштаба вариаций высоты фирновой границы представляет собой непростую задачу, поскольку амплитуда этих колебаний везде разная: она зависит от варибельности погодных условий данного места и от расчлененности рельефа. Оставляя открытым последний вопрос, осуществим примерную оценку E_0 , имея в виду, что колебаниям температуры на 1 градус соответствуют изменения высоты порядка 100 м. Разумеется, изменение температуры вдоль склона не обязано совпадать со значением адиабатического градиента температуры (0,98°C/100м), и в реальных условиях градиент может отличаться от этого значения, однако в качестве разумной оценки использование такой величины не должно привести к принципиальным ошибкам. Поскольку речь идет о межгодовых колебаниях, то естественно оценить возможные колебания высоты, используя представления о величине стандартного отклонения межго-

довых колебаний температуры. Во внетропических областях на уровне моря оно составляет, по данным метеорологических станций, порядка 1°C. На высотах, соответствующих расположению ледников, это уже может составить 2–4°C. Как было показано выше, вклад колебаний осадков в динамику ледника имеет (по крайней мере, в умеренной зоне) тот же порядок, что и изменения температуры (см. для примера рис. 3.3.2). Поэтому выберем $E_0 = 600$ м.

Подчеркнем, что здесь идет речь о колебаниях высоты снеговой линии, а не о вариациях мощности самого ледника.

Теперь, используя подход, развитый в 1.2, определим дисперсию, соответствующую установившемуся режиму флуктуаций. Для ледника Aletschgletscher получим для используемой переменной $\sqrt{\Delta L}$, что в стационарных условиях $\sigma^2_{\sqrt{\Delta L},st} \approx 70$ м. Это есть оценка стандартного отклонения длины ледника в стационарных условиях.

Расчеты для ледника Nordenskiöldbreen также дают $\sigma^2_{\sqrt{\Delta L},st} \approx 70$ м. Таким образом, в обоих рассмотренных случаях величина стандартного отклонения одинакова в предельном, стационарном случае, однако выход на установившейся режим происходит с существенно различной скоростью и требует различной продолжительности.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда нижняя граница ледника расположена на берегу моря или озера. В этом случае бюджет массы определяется не только процессами аккумуляции и абляции, но и образованием айсбергов. Скорость последнего процесса пропорциональна, как показано в работе [Oerlemans, 2008], значению глубины воды на фронте ледника. Причем, чтобы остаться в рамках принятого подхода, считается, что она может быть выражена через его среднюю толщину, как kH_m . Если вновь считать ледник одномерным образованием, расположенным на склоне с постоянным наклоном, то отток массы за счет образования айсбергов параметризуется выражением

$$F = c(b_0 - \nu L)kH_m. \quad (3.3.12)$$

Здесь c – константа, равная, по порядку величины, 1 м/год для ледников, выступающих в море с хорошо развитой приливной деятельностью. Для ледников, фронт которых погружен в озеро, эта величина существенно меньше.

Теперь вместо уравнения (3.3.6) имеем

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2(1 + \mu\nu)}{3\alpha\sqrt{L}}(B - F), \quad (3.3.13)$$

и вместо уравнения (3.3.8) получаем

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2(1 + \mu\nu)}{3\alpha} \left(-0.5\beta\nu L^{3/2} + \frac{\alpha\beta + \alpha c\nu k}{1 + \mu\nu} L + \beta(b_0 - E)L^{1/2} - \frac{\alpha c b_0 k}{1 + \mu\nu} \right). \quad (3.3.14)$$

Вновь апеллируя к рассмотренным выше мотивировкам, линеаризуем уравнение (3.3.14) относительно среднего (равновесного) значения. В этом случае имеем

$$\frac{d\Delta L}{dt} = \left(-\frac{(1+\mu\nu)\beta v\sqrt{L_0}}{3\alpha} + \frac{2(\beta+cvk)}{3} + \frac{2(1+\mu\nu)\beta b_0}{3\alpha\sqrt{L_0}} - \frac{2(1+\mu\nu)\beta}{3\alpha\sqrt{L_0}}\Delta E \right) \Delta L. \quad (3.3.15)$$

В скобках правой части первые три слагаемых (обозначим их Q) есть константа для данного ледника, а последнее слагаемое представляет собой случайный процесс. Если вести обозначение (q) для множителя перед ΔE , уравнение переписывается так

$$\frac{d \ln \Delta L}{dt} = -qE_0\Delta E + Q. \quad (3.3.16)$$

Или, вводя функцию $z = \ln \Delta L - Qt$, получим для нее линейное уравнение со случайным воздействием, не зависящим от состояния системы

$$\frac{dz}{dt} = -qE_0\Delta E. \quad (3.3.17)$$

Случайные воздействия вариаций баланса массы, выраженные через ΔE , позволяют трактовать это уравнение как стохастическое уравнение, описывающее «безинерционное» поведение броуновского процесса (иногда в этом случае используется название «винеровский» процесс [Ахманов и др., 1981]. Используя результаты раздела 1.2, можно получить, что при условии, что $\Delta E(t)$ – дельта-коррелированный процесс (при дискретности, превышающей радиус корреляции), дисперсия σ_Z^2 растет прямо пропорционально времени

$$\sigma_Z^2 = 2\tau_r \sigma_E^2 t. \quad (3.3.18)$$

Соответственно, растет со временем и стандартное отклонение логарифма аномалии длины ледника

$$\sigma_{\ln \Delta L} = Qt + \sqrt{2\tau_r} \sigma_E \sqrt{t}.$$

С практической точки зрения это означает, в частности, возможность существования в динамике ледников такого типа долгоживущих аномалий, которые могут быть ложно приняты за тренды, развивающиеся под влиянием внешних влияний, в то время как на самом деле здесь проявляется нестационарность внутренней динамики.

3.4. Стохастические колебания уровней озер

Спектр колебаний уровня крупных озер включает сезонные колебания, нерегулярные короткопериодные изменения, связанные с нагонами воды и

сейшами, а также межгодовые вариации, проявляющиеся в широком диапазоне. Генезис изменений определяется изменчивостью составляющих водного баланса озера, и только при рассмотрении долговременных изменений иногда приходится привлекать к рассмотрению геологические или геоморфологические изменения. Объем воды в озере, площадь и уровень озера, реагируют на все вариации водного баланса, однако объем озера обычно велик по сравнению с вариациями притоков и оттоков воды, так что отклик озера представляет собой реакцию на накапливающийся во времени сигнал.

Рассмотрим для иллюстрации этого положения динамику уровня Каспийского моря – крупнейшего на планете бессточного водоема. Связь межгодовых приращений его уровня (h) с ежегодными значениями результирующего водного баланса не дает устойчивой связи: коэффициент корреляции равен приблизительно 0,7. Более значимая связь получается между h и значениями нормированной интегральной разностной кривой результирующего водного баланса, которая представляет собой накопление за n шагов разностей между значением переменной на каждом временном шаге (B_i) и ее средним значением.

Ординаты данной кривой находятся по формуле $S_n = \sum_{i=1}^n (B_i - B_0) / B_0$,

в которой годовые значения водного баланса сравниваются с его среднемноголетней нормой. Коэффициент корреляции между среднегодовыми значениями уровня Каспийского моря и показателем S_n достигает уже 0,95 [Косарев и др., 1996]. Таким образом подтверждается, что связь уровня водоема и его водного баланса более четко проявляется при рассмотрении не ежегодных, а накопленных расходов воды, то есть реакция водоема представляется медленным откликом инерционного объекта на слабые высокочастотные воздействия.

Сложность и разномасштабность реакции озера на внешние воздействия предопределяет возможность применения для описания изменчивости объема (площади или уровня) стохастических моделей. Так, в достаточно общей модели стохастического резервуара [Lloyd, 1993] решается задача определения вероятностных характеристик динамики объема (V_t) на основе информации о вероятностных свойствах величины баланса «втекающей – вытекающей» воды (X_t). Введя $U_t = V_t + X_t$, имеем балансовое соотношение, связывающее состояние резервуара на последовательных моментах времени: $U_{t+1} = U_t + X_{t+1}$. Обозначая дифференциальные функции распределения вероятностей для U_t как $h_t(u)$, а для X_t как $f(x)$, получим уравнение

$$h_{t+1}(u) = \int_0^{\infty} h_t(v) f(u-v) dv.$$

Последовательность $\{U_t^+\}$ представляет собой марковский процесс, у которого последовательность $h_0(u), h_1(u), h_2(u) \dots$ сходится к установившемуся распределению $h(u)$. Соответственно

$$h(u) = \int_0^{\infty} h(v) f(u-v) dv.$$

Таким образом решается задача определения вероятностных свойств динамики объема воды в резервуаре на базе эмпирически определяемых функций распределения вероятностей вариаций водного баланса.

В данной книге авторы ставят перед собой другую цель – определять особенности динамики объема (уровня) стохастического резервуара опираясь на соотношения, определяемые детерминированным уравнением водного баланса. Для решения этой задачи, рассмотрим уравнение, описывающее изменение во времени объема (V) воды озера [Фролов, 1985],

$$\frac{dV(t)}{dt} = v^+(t) - f(t)e(t) - v^-(t). \quad (3.4.1)$$

Здесь f – площадь поверхности озера, $V(t) = V_* + \int_{h_*}^{h(t)} f dz$; e – представ-

ляет собой разность «испарение минус осадки» над зеркалом; v^+, v^- отражают вклад речного стока в озеро и объем вытекающей воды.

Данное балансовое выражение можно использовать для описания вариаций во времени уровня озера. Для этого требуется соответственным образом преобразовать члены уравнения. Прежде всего отметим, что колебания уровня относительно среднесноголетного значения малы. Это делает возможным линеаризацию уравнения. Это условие, типично представляющее собой в сложных задачах ограничение общности, в данном случае является фактически необходимым, поскольку означает, что на протяжении рассматриваемого интервала времени мы имеем дело с одним и тем же озером, не претерпевающим принципиальных изменений своих свойств, неминуемых в случае катастрофических изменений уровня. В таком диапазоне небольших колебаний уровня, с достаточно высокой степенью точности выполняется линейное соотношение, связывающее положение уровня с площадью зеркала озера, то есть $f = a + bh$. Это позволяет, в частности, принять $(a + bh)^{-1} \approx 1 - hb/a$, что будет использовано далее. Теперь, представляя сток воды из озера гидравлической зависимостью $v^- = v_0^- + \alpha_* h(t)$ (в которой первое слагаемое представляет собой величину среднесноголетного стока) запишем уравнение (3.4.1) [Фролов, 1985]

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{bv^+(t)}{a^2}h(t) - \left(\frac{\alpha_*}{a} - \frac{v_0^-b}{a^2}\right)h(t) + \frac{v^+(t) - v_0^-}{a} - e(t). \quad (3.4.2)$$

Отказываясь от рассмотрения внутрисезонных и внутригодовых изменений, перейдем к анализу межгодовых флуктуаций. Для этого выполним осреднение уравнения за год. Как оказалось, с достаточной точностью выполняется соотношение $\left(\overline{v^+(t)h(t)}\right) \approx \left(\overline{v^+(t)}\right)h(t)$. Это позволяет записать уравнение (3.4.2) в следующей форме:

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\lambda h(t) + g(t). \quad (3.4.3)$$

Здесь $\lambda = \frac{bv^+(t)}{a^2} + \left(\frac{\alpha_*}{a} - \frac{v_0^-b}{a^2}\right)$ и $g(t) = \frac{v^+(t) - v_0^-}{a} - e(t)$. Решение уравнения (3.4.3) дает зависимость поведения уровня во времени при начальном условии $h(t_0) = h_0$.

Вынуждающий процесс $g(t)$ складывается под воздействием флуктуаций стока и колебаний видимого испарения. Для разных озер соотношение между этими факторами может быть различным, однако часто оказывается возможным, не разделяя их вклад, аппроксимировать функцию $g(t)$ процессом авторегрессии первого порядка:

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\gamma g(t) + \eta(t) \quad (3.4.4)$$

Здесь $\gamma = -\ln r$, $r > 0$ – коэффициент корреляции между $g(t)$ и $g(t+1)$, $\eta(t)$ – функция, описывающая белый шум.

Развитая теория может быть применена к различным озерам. Обратимся вновь к анализу динамики уровня Каспийского моря. Его поведение отражает вариации климата и режима увлажнения Восточно-Европейской равнины и западной части Средней Азии. Уровень Каспийского моря непрерывно флуктуирует. Это и сезонные колебания (~20 см), и нерегулярные изменения, связанные с ветровыми нагонами воды, и межгодовые вариации.

На рис. 3.4.1 представлены изменения уровня за период инструментальных наблюдений. Отметим, что при всей привлекательности использования данных непосредственных измерений следует иметь в виду, что столетний интервал наблюдений не может дать надежной статистической картины поведения такого инерционного объекта, как Каспийское море [Раткович, Болгов, 1994]. В самом деле, для Каспия имеет место высокая связность межгодовых состояний – коэффициент корреляции между изменениями уровня в смежные годы оказывается очень высоким (~0,95), так что 100-летнему ряду наблюдений (фактически ряду зависимых данных) эквивалентно всего примерно пять независимых значений [Фортус, 1998]. Поэтому получается, что

на современном материале надежные в статистическом отношении выводы, касающиеся динамики уровня этого моря, получены быть не могут. В этой связи, например, представление эмпирической дифференциальной функции распределения повторяемости уровней Каспия в виде двумодальной кривой [Кожевникова, Найденов, 1998] является, по-видимому, не обоснованным [Раткович, Болгов, 1994; Добровольский, 2002].

С точки зрения независимости данных наблюдений ряд в несколько тысяч лет уже способен обеспечить для такого объекта, как Каспийское море, надежные статистические результаты. Однако его ценность снижается за счет того, что это уже не непосредственные измерения, а результаты интерпретации косвенных индикаторов. Во всяком случае, реконструированные именно по колебаниям уровня за 2500 лет (с шагом 10 лет) вариации стока Волги (любезно предоставленные нам Р.К. Клиге) имеют функцию распределения, практически совпадающую с гауссовой кривой (с 2%-ным уровнем значимости по критерию хи-квадрат).

Из компонентов водного баланса Каспийского моря наиболее быстро и ощутимо изменяется речной сток, основу которого составляет сток Волги. Например, для условий современных колебаний уровня Каспийского моря, величина дисперсий флуктуаций стока и колебаний видимого испарения составляет $0,026$ и $0,007$ (м/год)², соответственно. Практически это выражается в хорошей скоррелированности ежегодных колебаний уровня не с вариациями результирующего водного баланса моря, а с накопленными разностями волжского стока (рис. 3.4.1 а). Таким образом, колебания величины видимого испарения являются второстепенным фактором [Голицын и др., 1998].

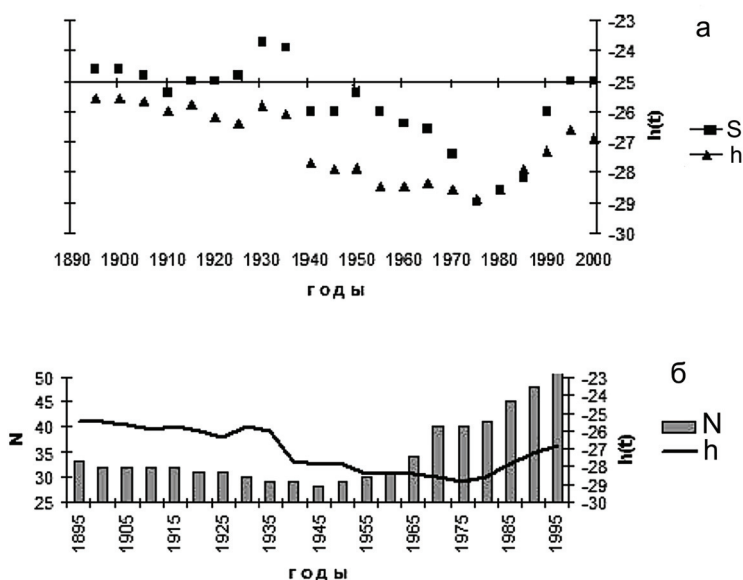


Рис. 3.4.1. Сопоставление колебаний уровня Каспийского моря (h): с интегральной разностной кривой волжского стока (S) [Косарев и др., 1996] (а) и числом «дождливых» (по классификации Л.В. Клименко) синоптических процессов (N)

Наиболее крупные увеличения и уменьшения стока Волги связаны с «эпохами» циркуляции атмосферы. Действительно, уровень Каспия хорошо коррелирует с количеством так называемых «дождливых» (по классификации Клименко) синоптических процессов [Исаев и др., 1995]. Первая треть 20 века характеризовалась преобладанием «сухих» процессов (рис. 3.4.1 б) – «накопление» этого эффекта постепенно привело к снижению уровня. В середине 1960-х годов произошло резкое возрастание повторяемости «дождливых» процессов – уровень моря отреагировал на него через полтора десятка лет. С точки зрения классификации циркуляции атмосферы Дзердзеевского, повышенное выпадение осадков в средней и восточной части бассейна Волги происходит преимущественно при развитии меридиональных (южных) типов циркуляции (хотя коэффициент корреляции между суммами годовых осадков в этой области и продолжительностью действия типов меридиональной циркуляции составляет всего 0,2–0,3) [Попова, 1999].

От характеристики регионального климатического режима перейдем к особенностям планетарной атмосферной циркуляции и сопоставим динамику уровня Каспийского моря с ее циклами. Используя схему Вангенгейма [Груза, Ранькова, 1996], все многообразие циркуляционных процессов можно свести к трем основным формам. Это W – зональный тип, при котором в нижней и средней тропосфере Атлантико-Европейского сектора существует западный квазизональный поток с волнами малой амплитуды. Два других типа характеризуют меридиональные процессы. Это тип С, при котором высотный гребень расположен над востоком Атлантики и Западной Европой и высотная ложбина над Восточно-Европейской равниной. Другой меридиональный тип – E, описывает расположение глубокой ложбины над восточной Атлантикой и Западной Сибирью и высотного гребня над Восточной Европой.

Падение уровня Каспия в 1940–1980-х годах происходило при пониженной повторяемости типа E, средней повторяемости W и слегка повышенной C. Рост уровня с конца 1980-х по настоящее время наблюдается при высокой повторяемости E (E^+) и низких значениях W (W^-) и C (C^-). При этом гребень в средней тропосфере расположен так, что над восточной частью Восточно-Европейской равнины обеспечиваются потоки преимущественно юго-западных направлений, в соответствии с которыми осуществляется движение циклонов. Высокое стояние моря в начале XX века сопровождалось большим значениям W, малым E и низким C. Таким образом, создается впечатление, что высокие уровни отвечают набору W^+C^- $W^+E^-C^-$ или $W^-E^+C^-$. Низкие уровни отвечали состоянию C с разным сочетанием других форм.

Возвращаясь к уравнению (3.4.3), применим его к описанию динамики уровня Каспийского моря. Для Каспия в соотношении $f = a + bh$ $a=366$ тыс. км², $b=14$ тыс.км²/м, при h , отсчитываемом в метрах относительно отметки $h^*= -28,5$ м. Речной сток в среднем составляет $v_0^+ = 275$ км³/год, сток в залив Кара-Богаз-Гол оценивается как $v^- = 8,8 + 8,6h$, км³/год. За счет испарения

Каспийское море отдает в атмосферу приблизительно в пять раз больше влаги, чем получает в виде осадков, выпадающих на зеркало озера, и видимое испарение с зеркала составляет приблизительно 0,75 м/год [Никонова, Бортник, 1994]. Показатель λ складывается из двух составляющих: $\lambda_1 = \frac{b}{a^2} v^+$,

$$\lambda_2 = \frac{\alpha_*}{a} - \frac{v_0^- b}{a^2}, \text{ причем } \lambda_1 = 0,03 \text{ (год)}^{-1} \text{ и } \lambda_2 = 0,02 \text{ (год)}^{-1}. \text{ Величина } \gamma \text{ для}$$

Каспия составляет $1,2 \text{ (год)}^{-1}$, так что $\lambda^{-1} \gg \gamma^{-1}$, то есть время корреляции его уровня существенно превосходит характерный масштаб времени воздействий. Расчет спектра показал, что действительно, более 90% энергии колебаний уровня связано с флуктуациями, характерным время которых превышает 20 лет [Николаенко, 1997]. Это означает, «быстрые» вариации $g(t)$ интегрируются и «медленные» изменения уровня проявляются тогда, когда накопится достаточно большая сумма отклонений определенного знака.

Сосредоточим внимание на межгодовых колебаниях уровня. При этом естественно оперировать его приращениями за год ($\delta h / \delta t$). Дифференцируя уравнение (3.4.3) по «быстрому» времени и используя выражение (4), получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta h}{\delta t} = -\lambda \frac{\delta h}{\delta t} + \eta - \gamma g \quad (3.4.5)$$

Если перейти к дискретным величинам, то, аппроксимируя уравнение (3.4.5) явной схемой и учитывая, что $\delta t = 1$ год, получим

$$(\delta h)_t = (1 - \lambda)(\delta h)_{t-1} + \varepsilon. \quad (3.4.6)$$

Здесь $\varepsilon = (\eta - \gamma g)\delta t$ и флуктуации этой величины, складывающиеся как синтез колебаний речного стока, осадков и испарения, могут быть представлены как белый шум. О справедливости такого подхода свидетельствует работа [Добровольский, 2002], в которой показано, что наилучшей статистической моделью, описывающей реально наблюдающиеся колебания уровня Каспия, является авторегрессионная модель первого порядка, аналогичная рассматриваемой нами. Такая же форма уравнения, полученного несколько иным путем, приводится в работе [Николаенко, 1997]. Таким образом, уравнение (3.4.5), описывающее годовые приращения уровня Каспийского моря, может трактоваться как стохастическое уравнение Ланжевена.

При выводе этого уравнения подразумевается неизменность климата – это условие проявляется, в частности, в том, что λ принимается константой. Однако если климат меняется, то на динамике уровня моря эти изменения сказываются и прямо (уровень реагирует на изменения водного баланса), и косвенно, поскольку меняется степень инерционности водной толщи по отношению к характерному поведению вынуждающего колебания процесса. В этом случае для расчета динамики уровня необходимо применение глобальной климатической модели, описывающей все звенья влагооборота [Кислов, Торопов, 2006].

Уравнение (3.4.3) может быть применено и для проточных озер, однако в этом случае его смысл другой, отличающийся от уравнения (3.4.5), описывающего медленные изменения уровня под влиянием накапливающихся случайных воздействий. Это выражается тем обстоятельством, что для проточных озер λ не является малой величиной. Например, для Ладожского озера $\lambda \approx 1,57 (\text{год})^{-1}$.

3.5. Внутрисезонные вариации влажности почвы как характеристика состояния увлажнения материков

Вариации режима увлажнения на суше сложны и многообразны, и конкретный механизм их формирования часто неодинаков в различных регионах. Тем не менее, оказывается возможным рассмотреть некоторые общие схемы, позволяющие объяснить ряд основных черт изменчивости. Важным подходом, позволяющим рассмотреть с единых позиций генезис различных процессов, является использование теории стохастического резервуара. В этом случае оказывается возможным изучить поведение объекта во времени без детального изучения конкретных механизмов его функционирования, базируясь на использовании определенных классов стохастических дифференциальных уравнений, которые были обсуждены ранее.

Рассмотрим влажность почвы, являющуюся интегральной характеристикой состояния увлажнения материков. Закономерности, определяющие изменения этой величины, удобно рассмотреть на основе модельного соотношения, описывающего баланс влаги (W , мм) в вертикальном столбе почвы единичного сечения глубиной H_s

$$\frac{dW}{dt} = -E_s + P + F_h - bH(W - W_c). \quad (3.5.1)$$

Здесь E_s – интенсивность (мм/сут) испарения (физическое испарение плюс эвапотранспирация). P – интенсивность осадков. F_h характеризует обмен влагой выделенного слоя с нижележащими горизонтами. Последнее слагаемое характеризует условия формирования поверхностного стока, возникающего в том случае, если влажность почвы превосходит критическое значение W_c , отвечающее условию, когда все поры в почве заняты водой (где, как и в главе 2, $H(x)$ – функция Хевисайда).

В уравнении (3.5.1) W отражает вариации подвижной части почвенной влаги. Полное влагосодержание определяется выражением $\theta = W + W_3$, в котором W_3 так называемая влажность завядания [Мичурин, 1975].

Для описания процесса испарения используем концепцию М.И. Будыко, согласно которой $E_s = E_0 W/W_k$, где W_k – критическая величина влагозапасов метрового слоя, равная 150–200 мм [Зубенок, 1975]. Сравнение рассчитывае-

мых по представленным формулам значений скорости испарения и скорости промачивания почвы осадками с реально наблюдающимися величинами показало, что соответствие нарушается при попытках воспроизвести суточный ход; при масштабах осреднения, превышающих суточный, данная зависимость демонстрирует надежные результаты. Водообмен через нижнюю границу почвенного слоя может быть представлен в следующем виде [Мичурин, 1975]:

$$F_H = k(\theta) \left[\frac{dh(\theta)}{dz} + 1 \right] = D' \frac{d\theta}{dz} + K, \quad (3.5.2)$$

где $h(\theta)$ – капиллярно-сорбционный потенциал, а $k(\theta)$ – коэффициент гидравлической проводимости.

Будем предполагать, что уравнение (3.5.1) описывает осредненные за сутки величины, представляющие собой средние значения по большим территориям (порядка характерной разрешающей способности климатической модели). Будем также считать, что глубина изучаемого слоя почвы составляет $H_s=1$ м. Выбор таких пространственных масштабов позволяет во многих практически важных случаях отказаться от рассмотрения в уравнении слагаемого, ответственного за описание поверхностного стока (об особенностях, возникающих при учете этого эффекта см. 2.3). На таких пространственных масштабах не эффективен и учет последнего слагаемого в формуле (3.5.2), отражающий эффекты быстрого просачивания влаги в нижележащие горизонты при превышении некоторого критического значения влагосодержания.

Тогда $F_H = \frac{D'(W_d - W)}{H_s^2} \equiv D(W_d - W)$. Здесь W_d – влажность почвы на

нижней границе деятельного слоя. Коэффициент D есть функция от полного влагосодержания, то есть $D=D(\theta)$.

С учетом сделанных предложений уравнение (3.5.1) переписется следующим образом:

$$\frac{dW}{dt} = -\lambda_E W + P + DW_d. \quad (3.5.3)$$

Здесь $\lambda_E = \frac{E_0}{W_k} + D$. Главный вклад практически повсеместно (кроме вы-

сокоширотных регионов, где близко к поверхности располагаются грунтовые воды) вносит $\frac{E_0}{W_k}$. Величина λ_E^{-1} дает оценку характерного времени измене-

ний $W=W(t)$ за счет действия процессов испарения и водообмена. Наши расчеты показали, что по обширной территории суши (территории бывшего СССР) λ_E^{-1} меняется от 0,5 до 5,5 месяцев. Анализ, проведенный в работе [Винников, Есеркепова, 1989], дает близкое значение в 2,8 месяцев. Такие же

величины (от 1 до 5 месяцев) получены [Delworth, Manabe, 1989] путем анализа автокорреляционных функций колебаний влажности почвы, воспроизведенных в численных экспериментах с моделью общей циркуляции атмосферы.

Нерегулярный характер выпадения осадков позволяет рассматривать функцию $P=P(t)$ как случайную, а уравнение (3.5.3) – как стохастическое. На возможность подобной интерпретации было обращено внимание в работе [Delworth, Manabe, 1988]. Для его решения введем начальное условие

$W(t=0) = W^0$, которое считается случайной величиной со средним значением $\overline{W^0}$ и дисперсией $\sigma_{w,0}^2$. Эти начальные условия определяют рядом

факторов. Прежде всего, количеством накопившегося снега за зиму, дающего при весеннем таянии важнейший вклад в водозапас почвы. Однако роль этого процесса контролируется двумя факторами. Во-первых, это условия увлажнения почвы осенью, определяющие степень заполненности почвенных пор талой водой. Во-вторых, степень промерзаемости почвы в холодный период года (зависящей от температурного режима и изоляционных свойств накопленного снежного покрова) – при сильно промерзшей почве талая вода не накапливается в почве, а в больших количествах уходит в объем половодья.

О высоком уровне изменчивости влажности почвы в начале теплого сезона свидетельствуют данные наблюдений, сгруппированные по так называемым агрогидрологическим районам европейской части бывшего СССР (см. табл. 3.5.1). Обращает на себя внимание то, что значения дисперсии достаточно близки между собой, поэтому учитывая сложное распределение по территории данных районов и неодновременность схода снежного покрова, можно принять в качестве характеристики изменчивости единое для всей территории значение $\sigma_{w,0} \approx 40$ мм.

Таблица 3.5.1. Среднее квадратичное отклонение запасов влаги (мм) под озимыми зерновыми культурами (по агрогидрологическим районам) слоя 0–100 см для третьей декады апреля [Кельчевская, 1983].

$\sigma_{w,0}$	РАЙОН								
	ОБВ	МКУ	ПКУ	ВИУ	КППВ	ПВП	УВП	СВП	ОСВП
Минимум	46,3	40,2	37,4	33,3	30,0	38,2	37,0	33,5	26,8
Максимум	62,9	58,8	52,9	54,5	31,1	44,7	41,0	37,1	42,6

Примечание. Районы: обводнения (ОБВ), максимального капиллярного увлажнения (МКУ), периодического капиллярного увлажнения (ПКУ), временного избыточного увлажнения (ВИУ), капиллярно-подперто-подвешенной влаги (КППВ), полного весеннего промачивания (ПВП), умеренного весеннего промачивания (УВП), слабого весеннего промачивания (СВП), очень слабого весеннего промачивания (ОСВП).

Рассмотрим особенности решения уравнения (3.5.3) применительно к изучению основных черт изменчивости влажности почвы на территории бывше-

го СССР. Будем рассматривать уравнение (3.5.3) как стохастическое дифференциальное уравнение, у которого начальное условие также представляет собой случайную величину [Кислов, 1991 б]. Последнее обстоятельство отличает данную постановку задачи от той, которая была исследована в разделе 1.2. Запишем вид точного решения уравнения (3.5.3) (как детерминированного обыкновенного дифференциального уравнения):

$$W(t) = W^0 e^{-\lambda_E t} + \frac{DW_d}{\lambda_E} (1 - e^{-\lambda_E t}) + e^{-\lambda_E t} \int_0^t e^{\lambda_E \xi} P(\xi) d\xi. \quad (3.5.4)$$

Данное выражение получено в предположении, что изменения λ_E в сезонном ходе являются гораздо более медленными, чем флуктуации влажности почвы. Статистическое усреднение выражения (3.5.4) дает

$$\langle W \rangle = \langle W^0 \rangle e^{-\lambda_E t} + \frac{\langle P \rangle + DW_d}{\lambda_E} (1 - e^{-\lambda_E t}). \quad (3.5.5)$$

Отсюда следует, что с возрастанием λ_E уменьшается интервал времени, в течение которого на величине $\langle W \rangle$ сказываются начальные условия (и соответственно возрастает относительный вклад второго слагаемого в формуле (3.5.5)). Стационарное состояние может быть достигнуто только в том случае, если достаточно велика продолжительность периода активного испарения. Этот интервал времени естественно соотнести с продолжительностью теплового периода года (T), который на территории бывшего СССР меняется от 1,5 до 7 месяцев. Расчеты показали, что условие $T > \lambda_E^{-1}$ выполняется только южнее 50° с.ш., так что нестационарная компонента ощущается на большей части рассматриваемой территории.

Определим дисперсию процесса $W(t)$. Для этого вычтем из выражения (3.5.4) выражение (3.5.5), возведем получившееся выражение в квадрат и выполним операцию статистического усреднения. При этом предполагается, что отсутствует корреляция между аномалией исходного состояния влажности почвы и флуктуациями осадков в теплый период года. Получим

$$\sigma_w^2 = \sigma_{w,0}^2 e^{-2\lambda_E t} + e^{-\lambda_E t} \int_0^t \int_0^t e^{\lambda_E(\xi+\eta)} \langle [P(\xi) - \langle P \rangle][P(\eta) - \langle P \rangle] \rangle d\xi d\eta. \quad (3.5.6)$$

Для вычисления данного интеграла необходимо знать корреляционную функцию флуктуаций осадков. Это убывающая функция, поведение которой может быть аппроксимировано экспоненциальной зависимостью $\sigma_p^2 \exp(-|\tau|/\tau_p)$. Здесь σ_p^2 – дисперсия флуктуаций осадков, а τ_p – характерное время существования корреляций. Отметим, что для настоящей задачи

конкретный вид данной зависимости не важен, необходимо лишь, чтобы данная функция быстро убывала с ростом $|\tau|$. Оценка τ_p может быть определена на основе эмпирических сведений. При этом можно использовать непосредственно сведения о поведении корреляционной функции [Исаев, 1988], однако эта информация далека от уровня климатических обобщений. Поэтому следует избрать другой путь, чтобы выразить искомую величину через показатель, определяемый более надежно. Для этой цели рассмотрим, следуя работе Кислова [1991а], сумму осадков за интервал времени Δt

$$R = \int_0^{\Delta t} P(\xi) d\xi.$$

Из-за нерегулярности флуктуаций осадков $R(t)$ представляет собой случайный процесс. Усреднение данного выражения дает $\bar{R} = \bar{P}\Delta t$, а выражение для дисперсии имеет следующий вид [Ахманов и др., 1981]:

$$\sigma_R^2 = 2\sigma_p^2 \tau_p^2 \left[\Delta t / \tau_p - 1 + \exp(-\Delta t / \tau_p) \right].$$

При $\Delta t \gg \tau_p$ получается $\sigma_R^2 = 2\sigma_p^2 \tau_p \Delta t$. Выражение для показателя относительной изменчивости – коэффициента вариации – запишется тогда следующим образом:

$$\frac{\sigma_R}{\bar{R}} \equiv C_{v,R} = \sqrt{\frac{2\tau_p}{\Delta t}} C_{v,p}.$$

Данное выражение демонстрирует связь коэффициента вариации с масштабом усреднения Δt . Сопоставление коэффициентов вариации сумм осадков, относящихся к различным Δt , позволило оценить τ_p . Для территории СССР среднее значение получилось равным 1,5 сут., (диапазон изменений невелик – в основном, от 1,1 до 1,9 сут, только на Дальнем Востоке и в Средней Азии возможны большие величины – до 2–2,5).

Возвращаясь к формуле (3.5.6), и используя для корреляционной функции представленное выше выражение, а также учитывая, что $\lambda_E^{-1} \gg \tau_p$, получаем:

$$\sigma_w^2 = \sigma_{w,0}^2 e^{-2\lambda_E t} + \frac{\tau_p \sigma_p^2}{\lambda_E} (1 - e^{-2\lambda_E t}). \quad (3.5.7)$$

Второе слагаемое получилось таким, как если бы функция $P(t)$ представляла собой стационарный дельта-коррелированный процесс с корреляцион-

ной функцией, равной $C\delta(\tau)/2$, $C = 2\tau \frac{\sigma_p^2}{p}$. Этот результат достигается за счет того, что корреляционная функция оказывается достаточно «острой» при $\tau \ll \lambda_E^{-1}$.

Таким образом, существуют два фактора, определяющие изменчивость состояния влажности почвы. Первый – это зависимость от аномалий ее начального состояния. Этот фактор особенно важен в начале периода активного испарения. Второй фактор – воздействие текущей изменчивости осадков, проявляющейся на фоне стабилизирующего влияния испарения и водообмена через нижнюю границу деятельного слоя почвы. Эти последние процессы определяют интервал времени $t \gg (2\lambda_E)^{-1}$, необходимый для достижения дисперсией стационарного значения,

$$\sigma_w^2 = \frac{\tau \frac{\sigma_p^2}{p}}{\lambda_E}. \quad (3.5.8)$$

Отметим, что для выполнения расчетов необходимо учесть факт медленных изменений величины $\lambda_E(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \lambda_E(\zeta) d\zeta$, в котором главная роль принадлежит изменениям величины испаряемости.

Для оценки качества модели расчетные величины были сопоставлены с данными наблюдений о изменчивости влажности почвы. Для этой цели использованы эмпирические величины σ_w , относящиеся к середине лета (третья декада июля), соответствующие определенному агрогидрологическому региону. Модельные величины рассчитывались по формуле (3.5.7). Результаты сравнения представлены на рис. 3.5.1. Можно констатировать, что модель правильно воспроизводит основные черты существующей изменчивости влажности почвы. Таким образом, верны основные принципы, положенные в основу модели.

Относительный вклад аномалий начального состояния и вариаций осадков будет зависеть от времени – роль первого будет постепенно уменьшаться. Для характеристики этого эффекта можно рассмотреть показатель δ , характеризующий вклад второго слагаемого в общую величину изменчивости,

$$\delta = \frac{\sqrt{\tau \frac{\sigma_p^2}{p} (1 - \exp(-2\lambda_E t)) / \lambda_E}}{\sigma_w}.$$

Анализ географического распределения этой величины по территории бывшего СССР показал, что на Восточно-Европейской равнине, в Западной Сибири, в Средней Азии и на юге Приморского края σ_w в середине лета на

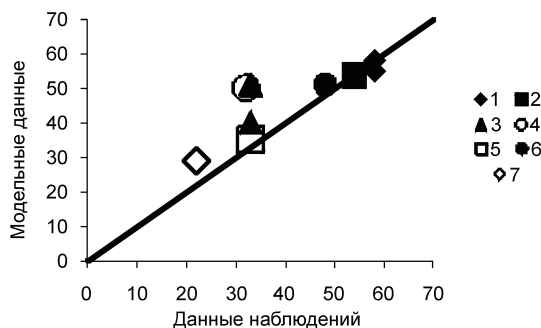


Рис. 3.5.1 Сопоставление рассчитанных по уравнению значений стандартного отклонения влажности почвы (мм) метрового слоя с данными наблюдений в третью декаду июля в различных агрогидрологических районах Восточно-Европейской равнины.

Районы: 1 – ОБВ, 2 – МКУ, временного избыточного увлажнения (ВИУ), 3 – КППВ, 4 – ПВП, 5 – УВП, 6 – ПКУ, слабого весеннего промачивания (СВП), 7 – ОСВП.

85–95% определяется текущими флуктуациями режима осадков [Кислов, 1991 б]. Существенно иные условия в Восточной Сибири. Здесь текущая изменчивость обеспечивает к середине лета 70–40% общей изменчивости, то есть вклад аномалий исходного состояния гораздо больше, чем в других регионах. Объясняется это прежде всего малой продолжительностью теплого периода (за время которого большие аномалии влажности почвы просто не успевают сформироваться) и сравнительно небольшой дисперсией осадков.

3.6. Стохастическая модель флуктуаций среднезональных температур

Обработка данных инструментальных наблюдений показала, что межгодовая изменчивость среднезональных температур, осредненных вдоль круга широты, вблизи поверхности (воды или суши) имеет тенденцию к росту от низких широт к высоким и от высоких частот к низким [Привальский, 1985; Гройсман, 1987]. Рост спектра температуры в область низких частот находит объяснение в рамках стохастических зональных энергобалансовых моделей, в которых роль случайных сил играют синоптические флуктуации притоков тепла [Lemke, 1977]. Исходным в таких моделях является осредненное вдоль круга широты φ уравнение теплового баланса столба единичного сечения, проходящего через атмосферу и деятельный слой суши или океана, записанное относительно среднезональной приповерхностной температуры T ,

$$C(\varphi) \frac{\partial T(\varphi, t)}{\partial t} = \frac{I_0}{4} S(\varphi, t) [1 - \alpha(\varphi, T, t)] - F_{\uparrow} - \text{div}(F_{\leftrightarrow}) + f(\varphi, t). \quad (3.6.1)$$

В (3.6.1) $C(\varphi)$ – эффективная теплоемкость, $I_0 = 1367 \text{ Вт/м}^2$ – солнечная постоянная, $\frac{I_0}{4} S(\varphi, t)$ – инсоляция, причем $S(\varphi, t) = 1,24 - 0,72 \sin^2 \varphi$ [Норт,

Коукли, 1978] описывает относительные широтные различия в приходе солнечной энергии на горизонтальную площадку на внешней границе атмосферы, α – альbedo, F_{\uparrow} – уходящая в космос тепловая радиация, $div(F_{\leftrightarrow})$ – дивергенция меридионального потока тепла. $f(\varphi, t)$ представляет собой вклад короткопериодных случайных флуктуаций в бюджет тепла. Для их корреляционной функции принимается приближение дельта-коррелированного по времени случайного процесса

$$\langle f(\varphi, t)f(\varphi', t') \rangle = 2D_f(\varphi, \varphi')\delta(t-t'). \quad (3.6.2)$$

Модели такого типа без случайных сил получили название зональных энергобалансовых моделей Будыко–Селлерса [Будыко, 1968; Sellers, 1969]. Впервые они были применены для проверки некоторых гипотез о происхождении ледниковых эпох [Будыко, 1968].

Для уходящей радиации и дивергенции меридионального переноса тепла были приняты полуэмпирические параметризации М. И. Будыко

$$F_{\uparrow} = A + BT, \quad (3.6.3)$$

$$divF_{\leftrightarrow} = \gamma(T - T_h). \quad (3.6.4)$$

В (3.6.3), (3.6.4) A , B и γ – эмпирические коэффициенты, T_h – среднеполушарная температура. Выполненные расчеты зависимости коэффициентов A и B от вертикальной структуры атмосферы с привлечением некоторых полуэмпирических соотношений позволяют производить оценки парникового эффекта, например, при росте концентрации углекислого газа [Мохов, Петухов, 1978]. Явная зависимость от приходящей на верхнюю границу солнечной радиации при параметризации обратной связи альbedo–температура позволила успешно применять энергобалансовые модели для описания широтного хода среднезональных температур при различных значениях внешних параметров (таких, как солнечная постоянная).

Соотношения (3.6.3), (3.6.4) представляют собой регулярную часть притоков тепла, адаптированную к плавной изменчивости среднезональных температур. Добавленные короткопериодные источники превращают (3.6.1) с параметризациями (3.6.3), (3.6.4) в стохастическое дифференциальное уравнение. Для малых отклонений $\Delta T(\varphi, t) = T(\varphi, t) - T_0(\varphi)$ относительно среднего стационарного меридионального профиля $T_0(\varphi)$ при параметризациях (3.6.3), (3.6.4) справедливо

$$C(\varphi) \frac{\partial \Delta T(\varphi, t)}{\partial t} = -m(\varphi)\Delta T(\varphi, t) + \gamma \int_0^{\pi/2} \Delta T(\varphi', t) \cos(\varphi') d\varphi' + f(\varphi, t), \quad (3.6.5)$$

где

$$m(\varphi) = B + \frac{I_0}{4} S(\varphi) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial T} \right)_{T=T_0} + \gamma. \quad (3.6.6)$$

Интегро-дифференциальное уравнение (3.6.5) при аппроксимации поля температуры набором его значений в отдельных дискретных широтных зонах φ_i эквивалентно системе линейных дифференциальных уравнений Ланжевена для $\Delta T_i(\varphi_i, t)$ с соответствующими случайными силами $f_i(t)$. При этом интеграл в (3.6.5) заменяется суммой и далее рассчитывается матрица обратных связей.

В (3.6.5) рассматриваются флуктуации температуры только в северном полушарии как наиболее охваченном эмпирическими данными. Распространение теории на весь земной шар не составляет принципиального труда. Также пренебрегается зависимостью коэффициентов от времени.

Из (3.6.5) можно вывести уравнение для пространственной корреляционной функции флуктуаций среднезональных температур $K_T(\varphi_1, \varphi_2) = \langle \Delta T(\varphi_2, t) \Delta T(\varphi_1, t) \rangle$ [Демченко, 1981]. Для этого умножим (3.6.6) при $\varphi = \varphi_1$ на $C(\varphi_2) \Delta T(\varphi_2)$, при $\varphi = \varphi_2$ – на $C(\varphi_1) \Delta T(\varphi_1)$, сложим и усредним, используем теорему Новикова для расщепления корреляций [Новиков, 1975]

$$\langle C(\varphi_1) \Delta T(\varphi_1, t) f(\varphi_2, t) \rangle = \langle C(\varphi_2) \Delta T(\varphi_2, t) f(\varphi_1, t) \rangle = 2K_f(\varphi_1, \varphi_2). \quad (3.6.7)$$

Окончательно

$$\begin{aligned} & [C(\varphi_1)m(\varphi_2) + C(\varphi_2)m(\varphi_1)]K_T(\varphi_1, \varphi_2) = \\ & = \gamma C(\varphi_1)K_1(\varphi_1) + \gamma C(\varphi_2)K_1(\varphi_2) + 2K_f(\varphi_1, \varphi_2), \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

где

$$K_1(\varphi) = \int_0^{\pi/2} K_f(\varphi, \varphi') \cos(\varphi') d\varphi'. \quad (3.6.9)$$

Интегрирование (3.6.8) приводит к уравнению Фредгольма II рода для K_1

$$K_1(\varphi) = \int_0^{\pi/2} \frac{\gamma C(\phi)K_1(\varphi) + \gamma C(\varphi)K_1(\phi) + 2K_f(\varphi, \phi')}{C(\phi)m(\varphi') + C(\varphi)m(\phi')} \cos(\phi') d\phi'. \quad (3.6.10)$$

Из (3.6.8) следует и выражение для дисперсии флуктуаций среднезональных температур $\sigma_T^2 = \langle \Delta T \rangle^2$

$$\sigma_T^2(\varphi) = \frac{K_f(\varphi, \varphi) + \gamma C(\varphi) K_1(\varphi)}{C(\varphi) m(\varphi)}. \quad (3.6.11)$$

Из (3.6.5) можно получить простые приближенные выражения для интенсивности флуктуаций температуры и выяснить, как влияют на ее широтный ход зависимость альбедо от температуры, широтный ход эффективной теплоемкости, а также пространственная структура поля случайных источников тепла. Для этой цели дополним (3.6.5) на конкретной широте φ_i

$$C_i \frac{d\Delta T_i(t)}{dt} = -m_i \Delta T_i(t) + \gamma \Delta T_h + f_i(t) \quad (3.6.5a)$$

приближенным уравнением для осредненной по полушарию температуры ΔT_h

$$C_h \frac{d\Delta T_h(t)}{dt} = -[m_h - \gamma] \Delta T_h(t) + f_h(t). \quad (3.6.12)$$

Индекс h обозначает осреднение по полушарию. Уравнения (3.6.5a), (3.6.12) представляют собой систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений Ланжевена, из которой можно определить дисперсию флуктуаций зональных температур [Демченко, 1984]:

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{m(\varphi)C(\varphi)} \left[K_f(\varphi, \varphi) + \gamma \frac{2\Delta K_f(\varphi) + \gamma \Delta K_\Sigma (m_h - \gamma)^{-1}}{m_h - \gamma + m(\varphi)C_h C(\varphi)^{-1}} \right], \quad (3.6.13)$$

$$\Delta K_f(\varphi) = \int_0^{\pi/2} D_f(\varphi, \varphi') \cos \varphi' d\varphi', \quad \Delta K_\Sigma = \int_0^{\pi/2} \Delta K_f(\varphi) \cos \varphi d\varphi.$$

В простейшем случае постоянных по пространству теплоемкости и коэффициентах обратной связи (3.6.13) становится точным. Согласно (3.6.13), вклад интегральных членов в дисперсию будет исчезать при $\gamma \rightarrow 0$, а также при стремлении к нулю радиуса пространственной корреляции случайных сил. В другом предельном случае $K_f(\varphi_1, \varphi_2) = K_0 = \text{const}$: $\sigma_T^2 = D_0 / (m - \gamma)$ и дисперсия зональных температур не зависит от меридионального теплообмена – флуктуации температуры различных зон полушария синхронны, а вся область флуктуирует как целое.

Если исходное двумерное поле синоптических притоков тепла является азимутально статистически однородным на сфере с малым радиусом пространственной корреляции r_k , то для не слишком близких к экватору и полюсу зон, как можно показать, справедливы асимптотически точные соотношения [Голицын, Демченко, 1980]

$$K_f(\varphi, \varphi) \approx \frac{\sigma_{f0}^2(\varphi) \tau_f r_k}{\pi \cos \varphi a}, \quad (3.6.14)$$

$$\Delta K_{\Sigma}(\varphi) \approx k_r \sigma_{f0}^2(\varphi) \tau_f \frac{r_k^2}{a^2}$$

где a – радиус Земли. Второе из соотношений (3.6.14) уже было использовано в расчете дисперсии среднеполюшарной температуры (формула (2.2.18), в которой $\sigma_{f0}^2(\varphi)$ и $\tau_f(\varphi)$ – дисперсия и время корреляции поля притоков тепла в точке, a – радиус Земли. То, что в первое из соотношений (3.6.14) отношение r_k/a вошло в первой степени, отражает тот факт, что оно является следствием осреднения вдоль круга широты, а не по площади. Для пространственной корреляционной функции в виде гауссовой экспоненты $k_r = 2/\pi$ и (3.6.13) при $\sigma_{f0}^2(\varphi) \tau_f = \text{const}$ переходит в [Демченко, 1984]

$$\sigma_T^2(\varphi) = \frac{\sigma_{f0}^2 \tau_f r_k}{\pi m(\varphi) C(\varphi) a} \left[\frac{1}{\cos(\varphi)} + \frac{2\gamma}{(m_h - \gamma) r_e} \frac{r_k}{(m_h - \gamma + C_h(\varphi)^{-1} m(\varphi))} \right]. \quad (3.6.15)$$

В формулах (3.6.14), (3.6.15) и в дальнейшем, как показали результаты численного моделирования, при приближении широты к полюсам ближе, чем на 5° широты, можно заменить $1/\cos(\varphi)$ на $1/\cos(85^\circ)$ и далее считать эту величину в формулах константой. Тем более эмпирические данные многолетних наблюдений в этих широтах отсутствуют и на графиках широтного хода дисперсий не приводятся. На этих широтах зональные модели климата теряют адекватность реальным процессам, протекающим в полярных широтах.

В приближенной формуле (3.6.15) содержатся уже три эффекта, влияющих на широтный ход дисперсии в рамках рассматриваемой простой модели: уменьшение площади пространственного осреднения (уменьшение $\cos \varphi$), зависимость альбедо от температуры (уменьшение m) и изменение эффективной теплоемкости C с широтой. Сопоставление расчетов широтного хода дисперсии температуры, полученных по приближенной формуле (3.6.15) с результатами численного решения точных уравнений модели (3.6.10), (3.6.11), проведенное при выборе характерных для энергодансовых моде-

лей климата параметров, показало на их хорошее соответствие. Найденные расхождения не превышали 6% [Демченко, 1984].

В рассмотренной стохастической модели (3.6.5), дополненной приближенным уравнением (3.6.12), короткопериодные флуктуации меридионального переноса тепла не могут давать вклад в изменчивость ΔT_h , так как осредненная по теплоизолированной с боковых границ области дивергенция потока тепла равна нулю. Интеграл от $K_D(\varphi, \varphi')$ – пространственной корреляционной функции случайных источников f_D , связанных с синоптической изменчивостью $divF \leftrightarrow$, тождественно обращается в ноль. Тогда, согласно (3.6.15), дисперсия σ_T^2 , обусловленная пульсациями дивергенции меридионального переноса тепла, выражается через локальные характеристики:

$$\sigma_T^2 = \frac{K_D(\varphi, \varphi)}{m(\varphi)C(\varphi)}. \quad (3.6.16)$$

В первых численных экспериментах с конечноразностным аналогом (3.6.5) [Lemke, 1977] в качестве случайных сил были выбраны именно f_D , однако их корреляционная функция была аппроксимирована положительно определенной симметричной функцией широты. Такая параметризация не удовлетворяет отмеченному выше свойству дивергенции меридионального переноса тепла. Абсолютное значение интенсивности флуктуаций f_D в отмеченной работе было выбрано достаточно произвольно. Однако методы стохастических дифференциальных уравнений позволяют построить упрощенные аналитические зависимости для функции $K_D(\varphi, \varphi')$, которая согласно (3.6.16) определяет вклад синоптической изменчивости меридионального переноса тепла в σ_T^2 .

Для этого рассмотрим стохастическую модель теплопереноса в случайном поле скоростей. В энергобалансовых моделях климата давно и успешно применяется диффузионная аппроксимация горизонтального переноса тепла в атмосфере: $divF = C_a D_a \Delta_h \langle T_a \rangle$ [Адем, 1967; Петухов, 1984], где Δ_h – горизонтальный оператор Лапласа. Такая параметризация была использована во второй главе для аппроксимации приспособленного к аномалиям ТПО поля температуры атмосферы. В то же время из теории случайных процессов известно [Кляцкин, 1980], что среднюю диффузию какой-либо субстанции можно представить как результат ее адвективного переноса в поле случайных скоростей. Например, рассмотрим одномерное модельное уравнение для некоторой характерной температуры атмосферы T_a [Демченко, Зубарев, 1989]

$$C_a \frac{\partial T_a}{\partial t} = -\mu_a T_a - u(t) C_a \frac{\partial T_a}{\partial x} + F_a, \quad (3.6.17)$$

где F_a – детерминированное воздействие, C_a – теплоемкость атмосферного столба, μ_a – коэффициент обратной связи, $u(t)$ – гауссовский дельта-коррелированный по времени случайный процесс

$$\langle u(t_1)u(t_2) \rangle = 2D_u \delta(t_2 - t_1). \quad (3.6.18)$$

Осредняя (3.6.17) стандартными методами [Кляцкин, 1980] с помощью теоремы Новикова (2.3.4) для дельта-коррелированного по времени случайного воздействия и учитывая, что согласно (3.6.7) значение вариационной производной $\delta T_a(x,t)/\delta u(t) = \partial T_a(x,t)/\partial x$, получим

$$C_a \frac{\partial \langle T_a \rangle}{\partial t} = -\mu_a \langle T_a \rangle + C_a D_u \frac{\partial^2 \langle T_a \rangle}{\partial x^2} + F_a. \quad (3.6.19)$$

Для характерных значений скорости ветра $U \approx 5$ м/с, и $\tau_u \approx 1$ сут эффективный коэффициент $D_u \approx U^2 \tau_u \approx 2 \cdot 10^6$ м²/с, что близко к его эмпирической оценке $3 \cdot 10^6$ м²/с [Адем, 1967; Петухов, 1984].

Уравнение (3.6.17) можно использовать и для расчета дисперсии пульсаций T_a : $\sigma_a^2 = T_a^2 - \langle T_a^2 \rangle$. Умножив (3.2.2) на T_a , получим

$$C_a \frac{\partial T_a^2}{\partial t} = -2\mu_a T_a^2 - C_a u(t) \frac{\partial T_a^2}{\partial x} + 2T_a F_a. \quad (3.6.20)$$

Из уравнения (3.6.20) следует выражение для вариационной производной $\delta T_a^2(x,t)/\delta u(t) = \partial T_a^2(x,t)/\partial x$. Осреднение (3.6.20) с использованием теоремы Новикова для расщепления корреляции

$$\langle u(t) T_a^2(x,t) \rangle = D_u \left\langle \frac{\partial T_a^2}{\partial x} \right\rangle$$

и с учетом (3.6.19) приводит к уравнению для σ_a^2

$$\frac{\partial \sigma_a^2}{\partial t} = -2\mu_a \sigma_a^2 + C_a D_u \frac{\partial^2 \sigma_a^2}{\partial x^2} + 2C_a D_u \left(\frac{\partial \langle T_a \rangle}{\partial x} \right)^2. \quad (3.6.21)$$

В статистически стационарном случае и в пренебрежении диффузией σ_a^2 уравнение (3.6.21) имеет решение, аналогичное (3.6.16):

$$\sigma_a^2 = \frac{D_u}{C_a \mu_a}, \quad R_a = C_a^2 D_u \left(\frac{\partial \langle T_a \rangle}{\partial x} \right)^2. \quad (3.6.22)$$

В флуктуационной гидродинамике аналогичная (3.6.22) формула для интенсивности ланжевеновских источников, связанных с градиентом температуры, получается из уравнения Больцмана и некоторых дополнительных соотношений [Климонтович, 1982].

Согласно (3.6.22) дисперсия σ_a^2 обратно пропорциональна теплоемкости и коэффициенту обратной связи (как и в (3.6.16)). Интенсивность случайных источников K_D выражается через средний поток тепла $\langle F \leftrightarrow \rangle = -C_a D_u \partial \langle T_a \rangle / \partial x$ [Демченко, Зубарев, 1989]:

$$K_D = \frac{\langle F \leftrightarrow \rangle^2}{D_u}, \quad (3.6.23)$$

причем R_a не зависит явно от C_a и μ_a , что важно для дальнейших обобщений.

Модельное уравнение (3.6.17) не учитывает тепловой отклик океана и по существу описывает быстрые синоптические флуктуации, тогда как при $t \gg \tau_a = C_a / \mu$ эффективная термическая инерция системы определяется в основном теплоемкостью океана, именно она входит в уравнение (3.6.16) для долгопериодной части флуктуаций температуры. Однако на временах τ_a в первом приближении термическим откликом океана, по-видимому, можно пренебречь, и, рассматривая (3.6.17) как вспомогательную модель, определять интенсивность синоптических источников K_D по (3.6.23).

Прежде чем подставлять это выражение в формулы для определения интенсивности низкочастотных флуктуаций температуры, следует учесть сферичность и эффект усреднения вдоль круга широты. В приближении статистически азимутально однородного поля на сфере выражение для интенсивности зонально осредненных величин задается формулой (3.6.14). В этом приближении (3.6.23) окончательно переходит в

$$K_D(\varphi, \varphi) = \frac{\langle F \leftrightarrow \rangle^2}{D_u} \frac{r_D}{\pi r_e \cos \varphi}. \quad (3.6.24)$$

Соотношение (3.6.24) удобно тем, что оно связывает интенсивность случайных источников, связанных с синоптической изменчивостью меридионального переноса тепла, с характеристиками среднего климата.

Для проверки полученных соотношений воспользуемся эмпирическими данными о межсуточной изменчивости F_θ – меридионального переноса явного тепла нестационарными атмосферными вихрями через фиксированные широтные круги: $\varphi = \text{const}$ [Stone et al., 1982]. Полный поток F_θ связан с F_{\leftrightarrow} – потоком тепла через единицу длины широтного круга соотношением: $F_\theta = F_{\leftrightarrow} 2\pi a \cos \varphi$. Дисперсия $\sigma_D^2 = \langle (\Delta \text{div} F_{\leftrightarrow})^2 \rangle$ связана с пространственной корреляционной функцией синоптических флуктуаций полных потоков $\langle F_\theta(\varphi, t) F_\theta(\varphi', t) \rangle$ соотношением

$$\sigma_D^2 = \lim(\varphi \rightarrow \varphi') \frac{1}{4\pi^2 a^4 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi'} \langle F_\theta'(\varphi, t) F_\theta'(\varphi', t) \rangle. \quad (3.6.25)$$

Считая, что при малых $\Delta\varphi = |\varphi - \varphi'|$ пространственная корреляционная функция зависит только от $\Delta\varphi$, так что $\langle F_\theta(\varphi, t) F_\theta(\varphi', t) \rangle = \sigma_{F\theta}^2 \rho_F(\Delta\varphi)$, получим для $K_D = \sigma_D^2 \tau_D$

$$K_D = \frac{\sigma_{F\theta}^2 \tau_D}{4\pi^2 a^2 r_F^2 \cos^2 \varphi}, \quad r_F^{-2} = \left(\frac{d^2 \rho_F}{a^2 d\Delta\varphi^2} \right)_{\Delta\varphi=0}. \quad (3.6.26)$$

Величину r_F – радиуса пространственной корреляции F_θ – можно оценить по приведенным в [Stone et al., 1982] оценкам: $r_F = (1-1,5) \cdot 10^3$ км (грубое пространственное разрешение приведенных данных не позволяет судить о величине r_F с большей точностью). Время корреляции τ_D оценивается по приведенной там же временной корреляционной функции как $\tau_D = 0,73$ сут.

Приравнивая интенсивность случайного источника K_D , получаемую по (3.6.26), теоретической оценке (3.6.24) по простой стохастической модели, находим связь между $\sigma_{F\theta}^2$, $\langle F_{\leftrightarrow} \rangle$ и F_θ :

$$\sigma_{F\theta}^2 = A_F 4\pi a^2 \cos \varphi \langle F_{\leftrightarrow} \rangle^2 = A_F F_\theta^2, \quad A_F = \frac{r_D^3}{\pi a \tau_D D a}. \quad (3.6.27)$$

В (3.6.27) для простоты приравнены радиусы пространственной корреляции в (3.2.26) и (3.6.24). На рисунке 3.6.1 приведены результаты проверки (3.6.27) для данных о январских синоптических флуктуациях потока явного тепла [Stone et al., 1982] и данных о среднем многолетнем значении потока явного тепла, переносимого атмосферными вихрями [Oort, Rasmusson, 1971]. Видно, что выражение (3.6.27) хорошо воспроизводит эмпирическую связь между $\sigma_{F\theta}^2$ и $\langle F_{\leftrightarrow} \rangle$ в средних широтах. Наклон прямой на рис. 3.6.1 дает эмпирическую оценку $A_F^e = 1,2$. Для получения теоретической оценки A_F по (3.6.27) примем оценку $D_u \approx 3 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$, [Адем, 1967; Петухов, 1984] и $\tau_D = 0,73$ сут. При $r_D = 1,1 \cdot 10^3 \text{ км}$ теоретическая оценка в точности совпадает с эмпирической. Такое значение r_D лежит в диапазоне изменений его оценок по данным [Stone et al., 1982], именно его мы примем для дальнейших оценок.

Оценим дисперсии межгодичных флуктуаций среднезональных температур $\sigma_T^2(\varphi)$ по (3.6.15), рассчитав отдельно вклады, вызванные синоптическими флуктуациями радиационного баланса на верхней границе атмосферы и синоптическими флуктуациями меридионального переноса тепла. Далее оценим $\sigma_T^2(\varphi)$ при их совместном воздействии.

Вклад синоптической изменчивости радиационного баланса на верхней границе атмосферы оценим приближенно, как и в глобально осредненной модели раздела 2.2, через (3.6.14), положив, что в среднем за год зонально осредненная интенсивность синоптических флуктуаций практически не зависит от широты и составляет $\sigma_{R0} = 40 \text{ Вт/м}^2$.

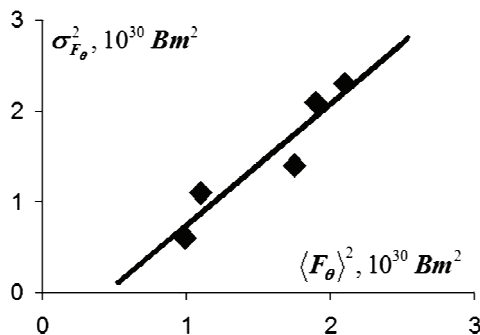


Рис. 3.6.1. Проверка зависимости (3.6.27) по эмпирическим данным. По оси ординат отложены январские значения интенсивности межсуточной изменчивости вихревого переноса явного тепла [Stone et al., 1982]

Значения среднего потока, принятые при построении абсцисс, взяты по средним многолетним данным [Oort, Rasmusson, 1971].

Приняв для двумерного поля синоптических флуктуаций радиационного баланса на сфере $f_R(\varphi, \lambda, t)$ приближение статистически однородного на сфере поля, найдем дисперсию σ_T^2 из (3.6.13), (3.6.14). При этом корреляционную функцию $K_R(\varphi_1, \varphi_2)$ источников f_R , связанных с радиационным балансом, получим путем численного интегрирования двумерной корреляционной функции, зависящей от углового расстояния, задав ее в виде , который соответствует ранее принятой в разделе 2.2 пространственной корреляционной функции. Выберем для γ и B значения: $\gamma=3,75$ Вт/м²К, $B=2,0$ Вт/Км² [Агаян и др., 1985; Мохов 1981). В качестве оценки C можно принять $C=2 \cdot 10^8$ Дж/м²К. Эта оценка приблизительно соответствует теплоемкости верхнего слоя океана, взвешенной с учетом доли покрытой им поверхности полушария. Также воспользуемся эмпирическими оценками производной альбедо по температуре [Lian, Cess, 1988]. Для пространственного и временного радиусов корреляции синоптических флуктуаций примем $r_k=1000$ км, $\tau_k=3$ сут.

Результаты расчета стандартных отклонений междугодичных флуктуаций среднезональных температур под действием синоптической изменчивости радиационного баланса нанесены на рисунке 3.6.2 (кривая 1). Для сравнения нанесены наблюдаемые величины [Гройсман, 1987]. Исключение из оценок стандартных отклонений данных конца XX и начала XXI веков связан с тем, что на этот период приходится интенсивное глобальное потепление и интерпретировать полученные дисперсии как характеристики стационарного случайного процесса, представляется затруднительным (устное сообщение П.Я. Гройсмана). Видно, что рассчитанные стандартные отклонения близки к наблюдаемым в самых высоких широтах и в поясе от 30 до 40° N. Вместе с тем в поясе от 50 до 70° N рассчитанные величины лежат ниже наблюдаемых, так что рассчитанные σ_T^2 составляют около 50% от наблюдаемых.

Для оценки σ_T^2 под действием синоптических флуктуаций меридионального переноса тепла воспользуемся результатами построенной стохастической модели. Для этого учтем в (3.6.24) наряду с потоками явного и потоки скрытого тепла. За неимением другой информации будем считать их статистически независимыми, полагая в (3.6.24) $\langle F^2 \rangle \leftrightarrow \langle F_\theta^2 \rangle + \langle F_q^2 \rangle$ (последнее слагаемое представляет горизонтальный поток скрытого тепла). Значения средних потоков определяются по наблюдаемой атмосферной статистике [Oort, Rasmusson, 1971], а сама дисперсия рассчитывается по (3.6.16). Результаты расчета изображены на рис. 3.6.2 кривая 2.

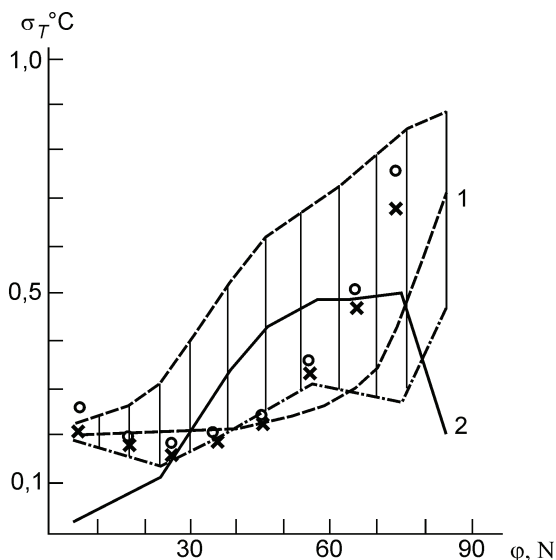


Рис. 3.6.2. Расчеты стандартных отклонений флуктуаций среднезональных температур с учетом зависимости альбедо от температуры под действием пульсаций радиационного баланса (кривая 1) и меридионального переноса тепла (кривая 2)

Заштрихованная область – диапазон изменения оценок при σ_T совместном действии обоих источников и различных коэффициентах корреляции между ними. Эмпирические σ_T нанесены кружками (без исключения линейного тренда) и крестиками (с исключенным линейным трендом).

Из сравнения кривых 1 и 2 следует, что роль f_R велика в высоких и низких широтах, в то время как в средних широтах пульсации f_D играют, по-видимому, более важную роль. Для оценки совместного действия обоих источников необходимо иметь информацию об их взаимной корреляции.

На рис. 3.6.2 заштрихована область, ограниченная двумя крайними оценками $\sigma_T^{\max}(\varphi)$ и $\sigma_T^{\min}(\varphi)$, полученными в предположении, что коэффициент корреляции f_R и f_D равен единице и соответственно – минус единице. Эти оценки не сводятся к сумме и модулю разности кривых 1 и 2 из-за наличия дополнительных слагаемых в формуле для σ_T^2 , связанных с ненулевым коэффициентом корреляции между зонально и полушарно осредненными синоптическими флуктуациями радиационного баланса. На рис. 3.6.2 видно, что нанесенные для сравнения эмпирические оценки почти на всех широтах лежат между $\sigma_T^{\max}(\varphi)$ и $\sigma_T^{\min}(\varphi)$.

Заметим, что полученное приближенное выражение (3.6.24), связывающее интенсивность синоптических источников с параметрами среднего климата, может быть полезными при оценке трендов его короткопериодных флуктуаций при антропогенных изменениях климата. Независимо от рассмотренной

конкретной линейной модели климата, для которой K_D был входным сигналом, эти оценки могут быть использованы и в более сложных нелинейных моделях.

Резюмируя результаты данного раздела, отметим, что система линейных дифференциальных уравнений Ланжевена, аппроксимирующая интегродифференциальное стохастическое уравнение (3.6.5), оказалась способной качественно и отчасти количественно воспроизвести увеличение интенсивности межгодовых флуктуаций зонально-осредненных приземных температур от экватора к полюсу. Выявлено, что увеличение этой интенсивности под воздействием короткопериодных флуктуаций радиационного баланса на верхней границе атмосферы играет определяющую роль в высоких и средних широтах. В средних широтах основную роль играют синоптические флуктуации меридионального переноса тепла. Для оценки интенсивности последних простые стохастические дифференциальные уравнения позволяют получать оценки, хорошо совпадающие с эмпирическими.

Зональные стохастические энергобалансовые модели (3.6.5) и (3.6.6) позволяют оценить статистические характеристики совместных флуктуаций среднеполюшарной температуры T_h и широты снежно-ледовой границы φ_S . В простейшем случае зональных энергобалансовых моделей эта граница привязывается к положению определенной изотермы $T(\varphi) = T_S$ [Будыко, 1968].

Эта простая параметризация не учитывает гидрологических эффектов, связанных со степенью континентальности климата на определенной широте. Примем в (3.6.1) нелинейную, ступенчатую аппроксимацию зависимости альбедо от широты φ : $\alpha(\varphi)$, зависящую от температуры перехода T_S ,

$$\alpha(\varphi, T(\varphi)) = \begin{cases} \alpha_w(\varphi), & T(\varphi) > T_S \\ \alpha_i(\varphi), & T(\varphi) < T_S \end{cases}. \quad (3.6.28)$$

То, что значения альбедо зоны покрытой льдом и не покрытой льдом (α_i и α_w), могут зависеть от широты φ , отражает возможное влияние широтного хода зенитного угла солнца, облачности, распределения суши и океана и т.д. При параметризации (3.6.28) среднеполюшарное альбедо становится функцией широты границы льда φ_S

$$\alpha_h = \alpha_h(\varphi_S). \quad (3.6.29)$$

Параметризация (3.6.29) является более предпочтительной по сравнению с часто принимаемой в нуль-мерных моделях климата зависимостью α_h от T_h – среднеполюшарной температуры. При рассмотрении флуктуаций климата под действием случайных синоптических возмущений необходимо в том или ином приближении учитывать их пространственную структуру. Если радиус

пространственной корреляции этих возмущений мал по сравнению с радиусом Земли (что имеет место в реальности), синхронность хода α_h от T_h может нарушаться и необходимо рассматривать их эволюцию в отдельности.

Приближенную систему стохастических дифференциальных уравнений эволюции φ_S и T_h можно найти из уравнения зональной энергобалансовой модели климата с дельта-коррелированными по времени случайными источниками тепла (3.6.1) с параметризацией альбедо по (3.6.28), (3.6.29). При этом уравнение энергетического баланса (3.6.1) распадается на два уравнения, записанные для зоны с альбедо α_i (снежно-ледовая) и α_w (бесснежная) (далее удобнее работать с горизонтальной координатой $x = \sin \varphi$):

$$C \frac{\partial T_{i,w}(x,t)}{\partial t} = \frac{I_0}{4} S(x,t) [1 - \alpha_{i,w}] - A - BT_{i,w} - \gamma(T_{i,w} - T_h) + f(x,t). \quad (3.6.30)$$

На снежно-ледовой границе ставится условие [Hsu, Hsieh, 1976]

$$pI(x_S + 0) + (1-p)I(x_S - 0) = I_S = A + BT_S, \quad (3.6.31)$$

в дальнейшем полагая $p=0,5$.

После ряда преобразований [Голицын, Демченко, 1980] из (3.6.30)–(3.6.31) следует стохастическое дифференциальное уравнение для среднеполюшарного φ_S и T_h

$$C \frac{dT_h}{dt} + A + BT_h = Q[1 - \alpha_h(x_S)] + f_h(t), \quad (3.6.32a)$$

$$-CT'_S \frac{dx_S}{dt} + (B + \gamma)T_S = \frac{I_0}{4} S(x_S)(1 - \alpha_S) + \gamma T_h + f(x_S, t), \quad (3.6.32b)$$

где

$$T'_S = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial T_w}{\partial x} + \frac{\partial T_i}{\partial x} \right]_{x=x_S}, \quad \alpha_S = \frac{1}{2}(\alpha_w + \alpha_i). \quad (3.6.33)$$

Если поле синоптических флуктуаций притоков тепла статистически однородно на сфере с малым радиусом пространственной корреляции r_k , то для отношения стандартных отклонений пульсаций среднеполюшарной температуры, полученной с учетом связи альбедо–температура (σ_T) и без ее учета (σ_{T0}) из теории следует

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_{T0}} = (1 + \gamma_B \Omega_\alpha)^{-1/2} \left(1 - 2\gamma_B + \frac{\gamma_B^2 r_e}{2r_k \cos \varphi_e} \right)^{1/2}. \quad (3.6.34)$$

Далее при вычислении производных принята равновесная, среднеклиматическая, среднеширотная величина положения снежно-ледовой границы φ_e .

В (3.6.34) введен важный безразмерный параметр

$$\Omega_\alpha = \frac{S(x_e)(\alpha_i - \alpha_w)}{S'(x_e)(1 - \alpha_S)}.$$

Он является мерой положительной обратной связи альbedo–температура, связанной с зависимостью положения снежно-ледовой границы от распределения температуры. При совпадении альbedo обеих зон он тождественно обращается в нуль. При этом время корреляции и дисперсия флуктуаций среднеполюслярной температуры совпадают с таковыми, полученными ранее для нульмерных моделей климата.

Для параметров среднего климата приняты значения γ , A , B , α_i и α_w , рекомендованные в [Мохов, 1981]. Согласно этим оценкам $\varphi_e = 60^\circ$, $\alpha_w = 0,29$, $\alpha_i = 0,29$, $2\gamma_B = 1,88$, $\Omega_\alpha = -0,18$, $BT'_e/Q = -0,27$. В таблице 3.6.1 для различных значений r_k приведены значения относительного увеличения стандартного отклонения флуктуаций среднеполюслярной температуры из-за действия обратной связи альbedo–температура.

Таблица 3.6.1. Значения σ_T/σ_{T0} , вычисленные при различных радиусах пространственной корреляции синоптических источников флуктуаций r_k

r_k , км	0	500	1000	1500	2000	∞
σ_T/σ_{T0}	∞	1,63	1,54	1,50	1,49	1,45

Из данных таблицы 3.6.1 следует, что учет зависимости альbedo от температуры в рамках рассматриваемой модели приводит к существенному увеличению интенсивности флуктуаций. При реальных $r_k = 1000 \div 1500$ км эта зависимость дает увеличение σ_T приблизительно в 1,5 раза. Увеличение σ_T/σ_{T0} с уменьшением r_k вызвано в данной модели тем, что $\sigma_{T0}^2 \sim R_\Sigma \sim r_k$, в то время как при малых r_k основную роль играют флуктуа-

ции на широте φ_e и $\sigma_T^2 \sim R_e^2 \sim r_k$. Здесь R_Σ и R_e соответствуют K_Σ и $\Delta K_f(\varphi_e)$ формулы (3.6.13) для случая, когда случайное возбуждение вызвано синооптическими флуктуациями радиационного баланса на верхней границе атмосферы.

Другой важной безразмерной характеристикой флуктуаций является параметр

$$C_{QI} = \frac{Q\sigma_{xs}}{\sigma_I} \left| \frac{\partial \alpha_h}{\partial x_S} \right|,$$

который равен отношению стандартных отклонений флуктуаций поглощаемой солнечной радиации и уходящей тепловой (σ_{xs} – стандартное отклонение флуктуаций синуса широты снежно – ледовой границы). В реальном диапазоне $r_k = 1000 \div 1500$ км величина C_{QI} при выбранных ранее значениях параметров составляет около 0,8. Для сравнения с данными наблюдений удобнее использовать параметр $C_{ST} = C_{QI} / \left| \alpha'_h \right| = \frac{Q\sigma_{xs}}{B\sigma_T}$.

Для малых флуктуаций x_S их стандартное отклонение можно связать с σ_S – аналогичной характеристикой флуктуацией площади снежно-ледового покрова: $\sigma_S \approx 2\pi r_e^2 \sigma_{xs}$. Стандартное отклонение межгодовых флуктуаций температуры северного полушария можно оценить по данным Университета Восточной Англии [Jones, Moberg, 2003] $\sigma_T \approx 0,23^\circ\text{C}$. Приняв значение $\sigma_S \approx 1,8$ млн км² [Голицын, Демченко, 1980], полученную по данным наблюдений за флуктуациями площади снежно-ледового покрова [Кукла, 1980], для величины C_{ST} получим эмпирическую оценку $C_{ST} \approx 5,8$. Расчет по рассмотренной стохастической модели при $r_k = 1000$ км приводит к оценке $C_{ST} \approx 4,5$, т.е. модель несколько занижает σ_S по сравнению с наблюдаемой (при одних и тех же σ_T). Это может говорить о важности других (не термических) факторов в формировании изменчивости снежно-ледового покрова. Для суши это в первую очередь относится к роли атмосферных осадков. Для морских льдов в [Захаров, 1980], например, высказано мнение об определяющей роли халинной структуры океана в формировании их изменчивости.

3.7. К теории ледниковых–межледниковых циклов

Глобальный климат планеты Земля определяется притоком солнечной энергии и особенностями климатической системы, включающей атмосферу,

океан и сушу, криосферу, климатически активную часть биоты в их сложном пространственном распределении. Долгопериодные вариации орбиты производят квазипериодические вариации сезонного и зонального распределения поступающего потока солнечной радиации (инсоляции), в то время как состав атмосферы влияет на нагрев, контролируя поглощение и пропускание, как инсоляции, так и земной длинноволновой радиации. За четвертичное время конфигурация континентов не претерпевала сколько-нибудь серьезных изменений, за исключением ритмически повторяющегося появления и исчезновения ледяных щитов на материках и связанного с этим изменения уровня моря и изменений в географии прибрежных районов и зоны шельфов. Граничные условия и параметры (поток инсоляции, концентрация парниковых газов, концентрация аэрозолей, состояние поверхности суши) совместно определяли условия циркуляции атмосферы и океана, а также взаимодействующего с ним состояния криосферы, то есть протяженность и высоту ледниковых щитов. Изменения объема льда на планете запаздывали по отношению к планетарно-обусловленным изменениям инсоляции на несколько тысяч лет.

Реальной движущей силой, способной продуцировать холодные (ледниковые) и теплые (межледниковые) фазы, служат колебания инсоляции на внешней границе атмосферы. Этот механизм климатических изменений известен как механизм Миланковича [Berger, 1978; Imbrie et al., 1984; Кислов, 2001; Stucifix, 2008]. Согласно этой теории, параметры земной орбиты изменяются под влиянием гравитационного воздействия со стороны Луны, Солнца и планет Солнечной системы. Эксцентриситет орбиты (параметр, показывающий ее отклонение от круга) медленно варьирует с приблизительно 100 и 400-тысячной периодичностью, индуцируя изменения годовой суммы солнечного тепла, достигающего Земли. Эти изменения, слишком слабые для того, чтобы ощутимо повлиять на климат, однако известные 100-тысячелетние чередования ледниковых и межледниковых эпох, обнаруживаемые в геологических данных, оказываются приблизительно в фазе с циклом эксцентриситета (большим значениям эксцентриситета соответствуют минимальные значения объема льда на Земле [Hays et al., 1976]). Это несоответствие между явной слабостью воздействия и существованием заметного природного отклика вызывает необходимость либо искать иные внешние факторы, управляющие 100-тысячелетней изменчивостью, либо привлекать для объяснения внутриклиматические нелинейные механизмы, усиливающие слабый сигнал.

Угол между плоскостью экватора и плоскостью земной орбиты (эклиптики) – так называемый «угол наклона», или «наклон», варьирует между 22 и 25° с 41-тысячелетним периодом. Положение летнего солнцестояния флуктуирует относительно позиции перигелия с 19- и 23-тысячелетней периодичностью. Эти факторы, в отличие от колебаний эксцентриситета, не меняют годовой суммы солнечного тепла, но сильно модулировали сезонную картину распределения инсоляции по широтным зонам.

Спектральная плотность различных реконструированных показателей климата (см. рис. 1.1.7) типично демонстрирует пик на низких частотах, соответствующий 100-тысячелетней периодичности. На более высоких частотах форма графика спектральной плотности выражает кривую красного шума. Этот «красношумный» континуум перекрывается несколькими слабыми спектраль-

ными пиками, соответствующими периодичностям Миланковича. В среднем вклад в общую дисперсию вариаций наклона (около 41 тыс. лет) равен 11%, а прецессионных осцилляций (около 20 тыс. лет) – лишь около 1% [Wunsch, 2003]. Эти оценки несколько меньше аналогичных величин, представленных в работе [Kominz, Piasias, 1979] и составляющих 25% от общей дисперсии.

Результаты исследований последних «сверхдлинных» детальных реконструкций климата [Bintanja, van de Wal, 2008; Crowley, Hyde, 2008] показали, что преобладающая 100 000-летняя периодичность стала свойственна земной климатической системе около 1 миллиона лет назад, то есть в то время, когда на земле стали интенсивно развиваться и исчезать покровные ледниковые щиты (дополнительные к оледенению Антарктиды и Гренландии, существующему примерно 15 и около 5 миллионов лет, соответственно). До этого в временных рядах преобладали 41-тысячелетние колебания. В данной работе мы не будем обсуждать причины этого «среднеплейстоценового перехода» с одного режима к другому, а сосредоточим внимание на позднем плейстоцене, когда характер флуктуаций климата имел вид 100-тысячелетних осцилляций, осложненных колебаниями меньшего масштаба, среди которых заметны ритмы Миланковича, но преобладают нерегулярные флуктуации, хорошо описываемые эмпирической моделью красного шума (см. раздел 1.1).

Построим простую модель климатических изменений. Будем исходить из выражения (3.6.1.), описывающего изменения вертикально и зонально осредненной среднегодовой температуры, связывающее температурный режим с радиационным балансом на верхней границе атмосферы и притоком тепла за счет межширотного переноса тепла. Будем рассматривать изменения среднегодовой температуры в зональной полосе – от экватора до некоторой широты, расположенной во внетропической области. В этом случае, интегрируя от 0 до φ , получим уравнение (сохраняя прежние обозначения), описывающее изменения температуры в пределах области (0 – φ)

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{I_0}{4} S [1 - \alpha] - (A + BT) - F_{\varphi} . \quad (3.7.1)$$

Для того, чтобы получить уравнение для определения T , представим поток тепла в виде функции от температуры. В разделе 3.6 для этой цели была использована параметризация Будыко. В данном случае удобнее считать, что поток тепла пропорционален градиенту температуры с некоторым коэффициентом макротурбулентного обмена, то есть $F_{\varphi} = -k(T - T_{\varphi=0})$.

Примем во внимание (как и в 3.6) то, что альbedo зависит от температуры, поскольку изменения последней определяют изменения площади снежного ледового покрова и, следовательно, вариации отражательных свойств планеты. По мнению, высказанном М.И. Будыко (1968), эта обратная связь играла одну из ключевых ролей в формировании крупных ледниково-межледниковых перестроек климата. Представим данное выражение в виде разложения в ряд Тейлора, ограничиваясь квадратичной зависимостью, то есть $\alpha = \hat{\alpha} + \xi T + \zeta T^2$.

Будем рассматривать отклонения состояния климата от современного режима, характеризуемого температурой \hat{T} . Предположим, что «возмущения» обусловлены действием внешних влияний и внутренних воздействий. Пусть первые – это колебания инсоляции, происходящие за счет изменения наклона и прецессии земной оси, а вторые связаны с действием короткопериодных флуктуаций, чей временной масштаб много меньше медленных «тысячелетних» изменений климата. Будем также предполагать, что изменения климата хоть и сказываются на температуре экваториальной области, но эти изменения малы по сравнению с теми, что имеют место в умеренной зоне. Действительно, данные экспериментов по моделированию климата позднплейстоценового криохрона (21 тыс. лет назад – эпоха максимального развития покровного оледенения), осуществленному в рамках РМIP [Кислов, 2001], показали, что различия аномалий температуры (отклонения температуры от современного режима) различаются в 20 раз. В этом случае получим, что

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -B_*\Delta T + f + \sum_k a_k \cos \omega_k t. \quad (3.7.3)$$

Здесь $\Delta T = T - \hat{T}$, а f представляет собой вклад в изменчивость короткопериодных флуктуаций, последнее слагаемое отражает периодичности Миланковича, а B_* – сумма всех множителей перед значением температуры, отражающих обратные связи за счет длинноволнового излучения, адвективного теплообмена, изменений альбедо и, возможно, ряда дополнительных эффектов, явно не учтенных при записи исходного выражения (3.7.1).

Существует довольно много примеров, в частности при проведении численных экспериментов с простыми энергобалансовыми моделями, что при рассмотрении макротурбулентного теплообмена представления о постоянстве коэффициента k недопустимы. Поэтому представим коэффициент макротурбулентности в виде $k \sim (\Delta T)^2$, отражающим то, что интенсивность теплообмена зависит от неоднородности поля температуры. Кроме того, имея в виду, что предполагается рассматривать процессы обратных связей весьма разного рода, проявляющиеся в сложном взаимодействии ледниковых покровов суши, глобальной циркуляции Мирового океана, планетарной карбонатной системы, биоты и др., можно думать, что нелинейность такого же рода характерна и в этих случаях. Поэтому будем считать, что $B_* = -b + \beta(\Delta T)^2$, $b, \beta > 0$.

Подставляя полученные соотношения в (3.7.3), запишем основное уравнение теории

$$\frac{d\Delta T}{dt} = b\Delta T - \beta(\Delta T)^3 + f + \sum_k a_k \cos \omega_k t. \quad (3.7.4)$$

Данное уравнение позволяет объяснить реконструированные в палеоиндикаторах особенности поведения климата на основе теоретических моделей, дающих критерий реальности осуществления определенного механизма, либо, напротив, закрывающих возможность того или иного объяснения. Будем рассматривать различные сегменты уравнения (3.7.4), изучая их частные решения. Разумеется, их сумма не является общим решением, однако каждое может рассматриваться как асимптотическое решение, к которому стремится общее решение уравнения (3.7.4) при определенном выборе параметров.

Приступая к анализу уравнения (3.7.4), прежде всего отметим, что за счет последнего слагаемого существует линейный отклик климата на заданные внешние колебания. Таким образом, существование в климатическом спектре линий Миланковича находит свое объяснение.

Теперь рассмотрим

$$\frac{d\Delta T}{dt} = b\Delta T - \beta(\Delta T)^3 + f, \quad (3.7.5)$$

и предположим возможность существования малых отклонений от равновесного состояния ΔT_0 . Тогда, если $\left(3\beta(\Delta T_0)^2 - b\right) \equiv \lambda > 0$, то получившаяся комбинация слагаемых уравнения (3.7.5)

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\lambda\Delta T + \tilde{f} \quad (3.7.6)$$

представляет собой классическое уравнение Ланжевена. Его решение представляет собой, как неоднократно обсуждалось выше, случайный процесс, спектр которого определяется, как

$$S(w) \sim \frac{1}{w^2 + \lambda^2}.$$

В области высоких частот, то есть $\nu \gg \lambda$, форма кривой функции спектральной плотности отражает континуум красного шума, точно так, как это имеет место в эмпирических спектрах (рис. 1.1.7). Таким образом, создается уверенное впечатление, что значительная часть динамики климатической системы может быть объяснена в терминах теории броуновского движения.

Масштаб времени (λ^{-1}) должен быть сопоставим с временными масштабами астрономической изменчивости, то есть должен составлять несколько десятков тысяч лет. Геофизическим событием адекватного масштаба является переход климатической системы из состояния криохрона в состояние термохрона (по терминологии работы [Зубаков, 1986]), выразившийся в глобальном потеплении, существенном сокращении ледниковых покровов суши, значительном росте уровня Мирового океана, повышении концентрации парниковых газом CO_2 и CH_4 .

Оценим масштаб медленных изменений, используя данные палеореко-
 рукций, как $\lambda^{-1} = T_0 \delta t / \delta T$. Как известно, переход от последнего миниму-
 ма оледенения к современному теплomu периоду (голоцену) продолжался
 примерно 5–7 тысяч лет, и среднегодовые глобально осредненные темпера-
 туры при этом увеличились примерно на 5°C [Кислов, 2001]. Используя в ка-
 честве температурного масштаба среднюю температуру планеты в современ-
 ных условиях ($T_0 \approx 15^\circ\text{C}$), получим, что $\lambda^{-1} \approx 20$ тысяч лет. При таком мас-
 штабе «медленных» изменений к «быстрым» надо отнести такие процессы,
 как глобальные изменения тепло- и влагообмена в атмосфере и океане, ва-
 риации альбедо в ответ на изменения температуры, действующие с опреде-
 ленным запаздыванием, колебания термохалинной циркуляции Мирового
 океана, известные как колебания Дансгора–Оешгера, вариации глобальной
 карбонатной системы при колебаниях температуры, приводящие к изменени-
 ям концентрации парниковых газов в атмосфере и в свою очередь воздейст-
 вующие на температуру, эффекты неустойчивости континентальных ледни-
 ковых покровов (события Хайнриха), создающие долгоживущие эффекты
 распреснения вод и нарушения термохалинной циркуляции Мирового океана
 и, возможно, некоторые другие, неизвестные в настоящее время.

Рассмотрим вновь уравнение (3.7.5), но теперь будем считать возможным
 существование больших аномалий. Появление слагаемого $-\beta(\Delta T)^3$ играет
 важную роль, ограничивая возможность нарастания амплитуды аномалий.
 Рассмотрим сначала случай отсутствия стохастических влияний, то есть
 $f = 0$. Уравнение (3.7.7) в такой форме имеет три стационарных состояния, из
 которых, как можно показать анализом малых возмущений, два устойчивых –
 $\Delta T_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}$ и одно – неустойчивое состояние $\Delta T_3 = 0$. В этом случае ре-
 шение, в зависимости от начального состояния, стремится достичь одного из
 состояний $\Delta T_{1,2}$ и остается «на нем» весь период эволюции.

В присутствии малых случайных возмущений уравнение (3.7.7) описывает
 так называемый «эффект переброса», заключающийся в том, что система
 приходит в окрестность одного из устойчивых состояний, а затем, по проше-
 ствии некоторого времени, случайно переходит в окрестность другого со-
 стояния и т.д. Средняя частота перехода зависит от интенсивности случайного
 воздействия.

Оказалось возможным, меняя характеристики случайного шума (интен-
 сивность и время корреляции), подобрать такой режим, при котором среднее
 время перехода между стационарными состояниями составило ~50 тысяч лет,
 что соответствует 100-тысячелетней ритмичности (см. рис. 1.1.7). Вид функ-
 ции спектральной плотности, построенной по данным, полученным нами в
 результате численного решения уравнения (3.7.7) таков, что на частотах, пре-
 вышающих $1/100000$ лет⁻¹ изменение спектра происходит по закону красного
 шума, отмеченного в эмпирических спектрах.

Наконец, выражение (3.7.4) в целом есть «каноническое» уравнение стохастического резонанса [Анищенко и др., 1999; Gammaitoni, et al., 1998]. За счет этого эффекта возможно проявление в колебаниях климата внешнего, даже слабого периодического сигнала, происходящее тогда, когда частота ω_k совпадает с частотой переброса между устойчивыми состояниями [Benzi et al., 1983].

В заключение данного раздела можно еще раз отметить, что принципиально важные черты палеоклиматической изменчивости находят хорошее объяснение в рамках достаточно простой теории, в которой ключевую роль играет представление о броуновском характере медленных климатических изменений, «разгоняемых» мелкомасштабными воздействиями.

Ритмы Миланковича, как уже отмечалось, не являются превалирующей особенностью эмпирических спектров. Это означает, что орбитально-индуцированные изменения инсоляции важны как механизм «пробуждающий» внутренние обратные связи. Это, вообще говоря, понималось еще, по-видимому, в первых работах, посвященных данной проблеме, когда механизм орбитальных изменений характеризовался не как «воздействие», а как «метроном» глобальных изменений климата [Hayes et al., 1976]. Тем не менее, иногда климатический отклик на вариации инсоляции может быть очень силен и может выходить за пределы границ случайного шума. Так происходит обычно в те эпохи, когда большие значения наклона приходится на ситуацию, когда перигелий орбиты попадает на лето Северного полушария. За счет этого приходящая к Северному полушарию летом солнечная энергия резко увеличивается и, несмотря на то, что зимой она столь же убывает, происходит общее потепление климата, так как глобальные изменения климата асимметричны – они следуют именно за летними изменениями температуры [см. Кислов, 2001]. В этом случае меняющаяся инсоляция уже важный действующий фактор реорганизации климата. Такой механизм ответствен в главных чертах, как показали результаты проекта PMIP [Joussaume, 1999], за переход от холодного позднего плейстоцена к голоцену. Другой канонический для палеоклиматологов пример это переход от теплой морской изотопной стадии 5e к холодной стадии 5d (125–115 тысяч лет назад). Моделирование происходящих при этом изменений климата, оледенения, уровня Мирового океана продемонстрировало, что изменения климата явились прежде всего откликом на перестройку инсоляции на внешней границе атмосферы [Schlesinger, Verbitsky, 1996].

3.8. О природе неравномерности вращения Земли

Вращение Земли характеризуется вектором мгновенной угловой скорости, который обычно представляют в виде разложения на следующие компоненты: одна направлена вдоль средней оси вращения и две других расположены в экваториальной плоскости. Первая компонента задает мгновенную скорость вращения планеты вокруг своей средней оси, а две других – координаты мгновенного положения полюса. Изменение первой компоненты проявляется как неравномерность вращения Земли, а вариации двух других составляющих демонстрируют движение полюсов. Самые короткие из фиксируемых современными методами измерений аномалий скорости вращения Земли (часто

характеризуемые для удобства вариациями продолжительности суток) относятся к внутри суточным изменениям. Эти флуктуации масштаба одного–двух десятков микросекунд и они хорошо коррелируют с приливными воздействиями. На масштабах времени месяцы – годы – десятки лет существует сложный спектр флуктуаций, на фоне которых регулярностью отличается (как будет показано ниже) сезонный ход. Масштабы более продолжительных изменений таковы, что, например, с середины 1950-х годов до начала 1970-х продолжительность суток выросла на $\sim 1,5$ мс, затем она уменьшилась на такую же величину в конце 1980-х годов. Наконец, приливная эволюция системы Земля – Луна должна создавать замедление скорости вращения, с увеличением длительности суток примерно на $0,001–0,002$ с в столетие.

Оставляя в стороне анализ короткопериодных флуктуаций и «вековых» изменений, рассмотрим неравномерность вращения сезонного и междугодного масштаба. В работе [Сидоренков, 2002] оценено, что изменения угловой скорости сопровождаются вариациями кинетической энергии вращения Земли порядка $10^{14} \div 10^{15}$ Вт. Среди планетарных процессов, с которыми Земля обменивается моментом импульса, аналогичной мощностью обладает только планетарная циркуляция атмосферы, в которой межширотный перенос энергии составляет порядка 10^{15} Вт [Кислов, 2001]. Мощность других процессов (геомагнитные бури, полярные сияния, землетрясения и вулканы, межпланетное магнитное поле, солнечный ветер) существенно меньше. Это позволяет искать генезис изменений угловой скорости именно в особенностях общей циркуляции атмосферы.

Рассмотрим механику вращения планеты Земля. Эта проблема в полном объеме излагается в [Сидоренков, 2002]. Здесь мы изложим только основную последовательность тех этапов, которые необходимы для построения теории. При этом полезным представляется рассмотрение аналогий, когда простые конструкции одномерного вращения используются для разъяснения понятий и эффектов, возникающих в трехмерном случае.

Как известно, момент силы (M), заставляющий вращаться твердое тело, равен произведению тангенциальной составляющей силы (F_t) на расстояние до оси вращения (r). Применяя для силы второй закон Ньютона, получаем

$$M \equiv rF_t = r \frac{dmV_t}{dt} = \frac{d}{dt} (mV_t r) \equiv \frac{dH}{dt},$$

где m – масса, H – так называемый угловой момент. Следует обратить внимание, на то, что векторы \vec{r} и \vec{V} перемножаются векторно. Выражая линейную скорость через угловую скорость получаем, что $H = m\omega r^2 \equiv \omega N$, где N – так называемый момент инерции. Если тело состоит из ряда компонентов, то $N = \sum_{(i)} m_i r_i^2$. Таким образом, момент инерции зависит от распределения мас-

сы относительно оси вращения. В случае непрерывной среды, сумма заменяется интегралом. Введенные понятия (M , H , N) далее будут использованы в общей теории.

Запишем дифференциальные уравнения движения планеты Земля около центра масс. Как известно из теоретической механики, в подвижной системе координат Ox_i скорость изменения момента импульса планеты Земля \vec{H} относительно центра масс равна моменту \vec{M} внешних сил относительно того же центра O , то есть $d\vec{H}/dt + [\vec{\omega} \times \vec{H}] = \vec{M}$, а в проекциях на оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 получаем

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} + \omega_2 H_3 - \omega_3 H_2 &= M_1, \\ \frac{dH_2}{dt} + \omega_3 H_1 - \omega_1 H_3 &= M_2, \\ \frac{dH_3}{dt} + \omega_1 H_2 - \omega_2 H_1 &= M_3. \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

Вектор момента импульса \vec{H} определяется выражением

$$\vec{H} = \int_A [\vec{r} \times \vec{w}] \rho dV = \int_A (\vec{r} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]) \rho dV + \vec{h}, \quad (3.8.2)$$

где $\vec{h} = \int_A [\vec{r} \times \vec{u}] \rho dV$ – относительный момент импульса. Здесь \vec{r} – радиус-вектор элементарного объема dV , ρ – плотность, A – объем тела, \vec{w} – абсолютная скорость перемещения объема относительно неподвижной системы координат. В формуле (3.8.2) хорошо прослеживается определение H для простого случая, рассмотренного в начале раздела.

Вводя тензорные обозначения (N_{ik}) , выражение (3.8.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} H_1 &= N_{11}\omega_1 + N_{12}\omega_2 + N_{13}\omega_3 + h_1, \\ H_2 &= N_{21}\omega_1 + N_{22}\omega_2 + N_{23}\omega_3 + h_2, \\ H_3 &= N_{31}\omega_1 + N_{32}\omega_2 + N_{33}\omega_3 + h_3. \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

Здесь компонентов тензора инерции (N_{ik}) представлены так:

$$\begin{pmatrix} \int_A (x_2^2 + x_3^2) \rho dV & -\int_A x_1 x_2 \rho dV & -\int_A x_1 x_3 \rho dV \\ -\int_A x_2 x_1 \rho dV & \int_A (x_1^2 + x_3^2) \rho dV & -\int_A x_2 x_3 \rho dV \\ \int_A x_3 x_1 \rho dV & -\int_A x_3 x_2 \rho dV & \int_A (x_1^2 + x_2^2) \rho dV \end{pmatrix}.$$

Нетрудно увидеть, что в представлении N_{ik} заложен тот же принцип, который был использован в случае рассмотрения момента инерции одномерного вращения – его значение пропорционально массе, умноженной на квадрат расстояния. Диагональные элементы тензора инерции называются осевыми моментами инерции, а остальные – центробежными моментами инерции.

Величины h_i есть относительные моменты импульса, обусловленные внутренними движениями вещества (воздуха, воды и т.п.) относительно системы координат Ox_i ,

$$h_1 = \int_A (x_2 u_3 - x_3 u_2) \rho dV, \quad h_2 = \int_A (x_3 u_1 - x_1 u_3) \rho dV, \quad h_3 = \int_A (x_1 u_2 - x_2 u_1) \rho dV.$$

При использовании сферической системы координат (φ, λ, z) : $x_1 = r \cos \varphi \cos \lambda$, $x_2 = r \cos \varphi \sin \lambda$, $x_3 = r \sin \varphi$, $dV = r^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dz$, а компоненты скорости вычисляются через u, v, w – составляющие вектора скорости, направленные вдоль круга широты, вдоль меридиана и вверх. При этом, например, $h_3 = r^3 \int_A \rho u \cos^2 \varphi d\lambda d\varphi dz$. Момент импульса h_3 интегрально характеризует интенсивность зональной циркуляции атмосферы. Его значение в сотни раз больше экваториальных компонентов момента импульса атмосферных движений (h_1 и h_2).

В невозмущенном состоянии осевые моменты инерции (A, B, C) планеты являются константами, а центробежные моменты равны нулю. Перераспределение масс в атмосфере и гидросфере немного изменяет компоненты тензора инерции, вызывая небольшие смещения планеты относительно оси вращения. Для характеристики этого эффекта введем $N_{11} = A + n_{11}$, $N_{22} = B + n_{22}$, $N_{33} = C + n_{33}$, $N_{12} = N_{21} = n_{12}$ и т.д. A и B – экваториальные моменты инерции, C , как и ранее, полярный момент инерции. Относительные моменты h_i также естественно считать малыми возмущениями. После линеаризации уравнений (3.8.1) относительно малых возмущений получим систему уравнений, которая традиционно записывается относительно безразмерных компонентов вектора угловой скорости: $v_1 = \omega_1 / \omega_0$, $v_2 = \omega_2 / \omega_0$, $v_3 = (\omega_3 - \omega_0) / \omega_0$, где $\omega_0 = 7,29 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ – угловая скорость, соответствующая периоду вращения 86 174 с. Здесь первые два уравнения определяют движение полюсов, а поскольку $\omega_3 \gg \omega_1$ и $\omega_3 \gg \omega_2$, именно третье уравнение описывает изменение модуля скорости вращения Земли.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_0} \frac{dv_1}{dt} + v_2 &= \frac{kM_1}{(C-A)\omega_0^2}, \\ \frac{1}{\sigma_0} \frac{dv_2}{dt} + v_1 &= -\frac{kM_2}{(C-A)\omega_0^2}, \\ \frac{dv_3}{dt} &= \frac{1}{C\omega_0} M_3. \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

В этих формулах $\sigma_0 = (C - A - \Gamma)\omega_0 / (A + \Gamma)$, Γ характеризует упругие свойства ($\Gamma = 0$, когда принимается модель абсолютно твердой Земли), k – константа, зависящая от гравитационного момента планеты [Жарков, Трубицын, 1978] и от степени деформаций, возникающих при вращении. В правой части уравнений находятся моменты сил M_j , действующие на Землю со стороны атмосферы. Таким образом, в данной постановке задачи рассматривается Земля, вращающаяся без атмосферы, но учитывается поток момента импульса через земную поверхность за счет механического взаимодействия атмосферы с Землей. Влияние перераспределения масс воздуха и атмосферной влаги на изменении момента импульса Земли здесь находит отражение, так как передачу импульса осуществляют перемещающиеся относительно поверхности воздушные массы.

Применим первые два уравнения системы (3.8.4) для изучения генезиса нестабильности положения полюсов. Из наблюдений известно, что они движутся по спирали вокруг некоторого среднего положения с периодичностью около 435 суток (период Чандлера). Оказывается, что весьма близкой к действительности является модель их свободных колебаний (т.е. $M_i = 0$). Дей-

ствительно, в этом случае уравнение для v_1 принимает вид $\frac{d^2 v_1}{dt^2} + \sigma_0^2 v_1 = 0$ и аналогично для v_2 . Решение получается в виде гармонической функции с периодом $2\pi/\sigma_0 = 448$ суток, что очень близко к величине, полученной из наблюдений.

Теперь обратимся к анализу влияния атмосферных процессов на модуль скорости вращения планеты. Перепишем третье уравнение системы (3.8.4), введя обозначение $|\vec{\omega}| \equiv \omega_3 \equiv \omega$,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{C} M_3. \quad (3.8.5)$$

Функция M_3 характеризует влияние атмосферы на скорость вращения Земли за счет обмена моментом импульсом между атмосферой и поверхностью. Он происходит за счет неупорядоченных движений, так что результирующая величина M_3 в каждый момент времени представляет собой случайную величину. В процессе обмена важную роль играют и самые маленькие масштабы, создающие турбулентные пульсации (с характерными масштабами порядка минуты), и более крупные структуры синоптического масштаба (с характерным масштабом от нескольких суток примерно до двух недель). В каждый момент времени вариации M_3 могут оказать лишь слабое влияние на ω , значимый сигнал может получиться, если произойдет накопление случайных воздействий. Данное рассуждение приводит к представлениям о том, что уравнение (3.8.5) можно трактовать как уравнение Ланжевена с $\lambda=0$, и вариации скорости вращения Земли описываются в этом случае как винеровский случайный процесс. Как было показано ранее, для функции спектральной плотности колебаний такого рода характерен рост обратно пропорциональный квадрату частоты. Рассмотрим эмпирический спектр (см. рис. 1.1.9). Он построен на основе непосредственных данных измерений неравномерности вращения Земли за более чем 40-летний период. Хорошо видно, что во временном диапазоне от суток до сезонов поведение кривой строго соответствует закону красного шума.

В работе [Сидоренков, 2002] была предпринята попытка непосредственно оценить M_3 на основе вычисляемых по данным стандартных метеорологических наблюдений турбулентных потоков импульса. Расчеты такого типа сопряжены с очень большими погрешностями, поэтому не удивительно, что надежный результат, связывающий вариации ω с потоками импульса, получен не был. Кроме того, более аккуратным является подход, при котором описывающие обмен формулы, входящие в M_3 , не «назначаются», а получаются в результате преобразований соответствующих уравнений.

Подойдем к данной проблеме с другой стороны, чтобы заменить трудно определяемые величины турбулентного обмена другими, надежно измеряемыми на глобальной метеорологической сети значениями. Для того, чтобы аккуратно реализовать эту идею, рассмотрим бюджет углового момента атмосферы.

Угловой момент единичной массы атмосферы (H), по определению, равен произведению тангенциальной составляющей скорости (v_t) на расстояние от оси вращения (равной $r \cos \varphi$ – на широте φ). Таким образом, $H = v_t r \cos \varphi = (\omega r \cos \varphi + u) r \cos \varphi$ [Пальмен, Ньютон, 1973; Гилл, 1986]. Здесь $\omega r \cos \varphi$ – линейная скорость, обусловленная вращением атмосферы вместе с планетой, u – скорость движения воздуха в зональном направлении относительно поверхности Земли, то есть зональная составляющая скорости ветра. Относительный момент считается положительным при $u > 0$, то есть при западном движении воздуха.

Рассмотрим уравнение гидродинамики для зональной компоненты (u), в котором принято во внимание действие на жидкую частицу сил барического градиента, Кориолиса и трения. В сферических координатах оно имеет вид

$$\frac{du}{dt} - \left(2\omega + \frac{u}{r \cos \varphi}\right)(v \sin \varphi - w \cos \varphi) = -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_{\lambda}.$$

Подставляя вместо u введенное выше выражение для H , получим [Гилл, 1986] уравнение, представляющее собой просто другую форму записи исходного уравнения

$$\rho \frac{dH}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial \lambda} + \rho F_{\lambda} r \cos \varphi. \quad (3.8.6)$$

Видно, что получившиеся при преобразованиях выражения, стоящие в правой части, представляют собой моменты сил (в соответствии с определениями, данными в начале параграфа) барического градиента и трения. Действительно, эти выражения получаются при умножении соответствующей силы (рассчитываемой на единицу массы воздуха) на расстояние от оси вращения. Момент силы Кориолиса равен нулю.

Используя выражение для полной производной, скомбинированное с уравнением неразрывности, перепишем выражение (3.8.6), умножив каждое слагаемое на $\cos \varphi$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho H \cos \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \lambda}(\rho u H \cos \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \varphi}(\rho v H \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w H \cos \varphi) = -r \cos \varphi \frac{\partial P}{r \partial \lambda} + \\ + \rho F_{\lambda} r \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Заметим, что в третьем слагаемом в левой части принятая форма записи подразумевает, что отброшено малое слагаемое $r^{-1} \rho v H \sin \varphi$. Подставим выражение для углового момента и получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u r \cos^2 \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \lambda}(\rho u^2 r \cos^2 \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \varphi}(\rho u v r \cos^2 \varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u w r \cos^2 \varphi) + \\ + \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega r^2 \cos^3 \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \lambda}(\rho \omega u r^2 \cos^3 \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \varphi}(\rho \omega v r^2 \cos^3 \varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \omega w r^2 \cos^3 \varphi) = \\ = -r \cos \varphi \frac{\partial P}{r \partial \lambda} + \rho F_{\lambda} r \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (3.8.7)$$

Рассмотрим вторую строку данного выражения. Используя правило дифференцирования произведения, перепишем ее в следующем виде

$$\begin{aligned} \omega r^2 \cos^2 \varphi \left\{ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \cos \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \lambda}(\rho u \cos \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \varphi}(\rho v \cos \varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \cos \varphi) \right\} + \\ + \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t}(\omega r^2 \cos^2 \varphi) + \rho v \cos \varphi \frac{\partial}{r \partial \varphi}(\omega r^2 \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

Сравнивая последнее слагаемое с третьим в фигурных скобках, получаем выражение

$$\omega r^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{\partial}{r \partial \varphi} (\rho v \cos \varphi) - \frac{2 \rho v \sin \varphi}{r} \right).$$

Здесь первое слагаемое примерно на два порядка больше второго, поэтому в формуле (3.8.8) можно с разумной точностью отбросить последнее слагаемое.

В (3.8.8) выражение, стоящее в фигурных скобках равно нулю, так как это уравнение неразрывности. Таким образом, остается отличным от нуля только выражение $\rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} (\omega r^2 \cos^2 \varphi)$. Оно принимается в рассмотрение, если считать, что не равна нулю угловая скорость вращения планеты.

Вернемся к уравнению (3.8.7), которое приняло следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u r \cos^2 \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \lambda} (\rho u^2 r \cos^2 \varphi) + \frac{\partial}{r \partial \varphi} (\rho u v r \cos^2 \varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u w r \cos^2 \varphi) + \\ + \rho \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} (\omega r^2 \cos^2 \varphi) = -r \cos \varphi \frac{\partial P}{r \partial \lambda} + \rho F_\lambda r \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (3.8.9)$$

Для характеристики зональной составляющей ускорения силы трения введем в рассмотрение напряжение ветра (τ) в соответствии с выражением: $F_\lambda = \partial \tau_\lambda / \rho \partial z$.

Поскольку идет речь о воздействии на всю планету в целом, имеет смысл перейти к глобально осредненному виду уравнению (3.8.9). Для этого проин-

тегрируем каждое слагаемое $\int_0^{2\pi} \dots d\lambda$, $\int_0^\infty \dots dz$ и $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots d\varphi$. При этом члены с частными производными по соответствующим координатным осям исчезнут,

однако интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{\partial p}{r \partial \lambda} r \cos \varphi d\lambda$ может быть отличен от нуля. В самом деле,

рассматривая его как интеграл Стильеса по мере (p), получим $\cos \varphi \int_{(p)} dp = \cos \varphi \sum_j (p_E^j - p_W^j)$. Здесь принято во внимание то, что если в

некоторых точках круга широты, вдоль которого выполняется интегрирование, существуют узкие горные хребты, то давление на их восточном и западном склонах будет различным и при крупномасштабном рассмотрении будет выглядеть как разрыв поля. Это внесет соответствующий вклад в составляющую момента сил барического градиента.

При выполнении интегрирования по вертикали $\int_0^\infty \dots dz$ следует иметь в виду, во-первых то, что, используя соотношение статики ($dp = -\rho g dz$), полу-

чим, что $\int_0^{\infty} \rho dz = p_S / g$, где p_S – давление у поверхности. Во-вторых, в уравнении появится выражение, описывающее вертикальный перенос импульса у земной поверхности, обусловленный двумя разными физическими эффектами (за счет интегрирования двух слагаемых, содержащих производную $\partial/\partial z$). В дальнейшем они объединены и обозначены τ_0 .

В результате интегрирования получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(r^3 \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho u \cos^2 \varphi dz d\varphi d\lambda \right) + r^4 \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \rho \cos^3 \varphi \frac{\partial \omega}{\partial t} dz d\varphi d\lambda = \\ & = - \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos \varphi \sum_j (p_E^j - p_W^j) dz d\varphi - 2\pi r^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi [\tau_0] d\varphi. \end{aligned} \quad (3.8.10)$$

Здесь символом квадратных скобок обозначена зонально осредненная величина, кроме того, каждый член уравнения дополнительно умножен на r^2 .

Под знаком производной по времени стоит величина, которая ранее была обозначена как h_3 . Последнее слагаемое в правой части следует интерпретировать как крутящий планету момент силы трения. Действительно, момент силы ($\tau_0 r \cos \varphi$) приложенный к зональной полосе (с площадью $2\pi r^2 \cos \varphi d\varphi$), равен $2\pi r^3 \cos^2 \varphi [\tau_0] d\varphi$. Интегрируя это выражение по широте, получаем крутящий момент, приложенный ко всей Земле.

Во втором слагаемом вынесем производную по времени из-под знака интегралов и, вводя новые обозначения, перепишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{dh_3}{dt} + \varepsilon \frac{d\omega}{dt} = -M_3. \quad (3.8.11)$$

Здесь $\varepsilon = (8\pi p_S r^4) / (3g)$, p_S и g – средние значения для Земли, $\varepsilon \approx 10^{32}$ кгм².

Величина, стоящая в правой части, представляет собой момент сил трения по всей поверхности Земли вместе с суммированным по всем отдельным меридиональным горным хребтам моментом сил давления. Это та же самая величина M_3 , которая ранее была использована в уравнении (3.8.5). Однако там она описывала действие атмосферных движений на Землю, а здесь характеризует воздействие поверхности на атмосферные движения и поэтому имеет другой знак.

Теперь продолжим анализ проблемы изменения скорости вращения Земли. Складывая формулы (3.8.11) и (3.8.5), и учитывая, что $C \gg \varepsilon$ получаем, что

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{C} \frac{dh_3}{dt}. \quad (3.8.12)$$

Проинтегрировав это уравнение от момента времени t_0 до момента t , получаем выражение

$$\frac{\omega(t) - \omega(t_0)}{\omega_0} = -\frac{h_3(t) - h_3(t_0)}{C\omega_0}, \quad (3.8.13)$$

в котором аномалии угловой скорости выражаются через вариации зональной компоненты поля скорости, то есть величины, которая измеряется методами аэрологического и спутникового зондирования и глобально восстанавливается на всем Земном шаре методами реанализа. Проверка соотношения (3.8.13) была произведена путем сравнения аномалий скорости вращения, рассчитанных по данным о вариациях h_3 , с соответствующими значениями, построенными по астрономическим данным. Оказалось [Сидоренков, 2002], что кривые очень хорошо согласуются между собой на масштабе сезонных и межгодовых изменений. В среднем за несколько десятков лет $h_3 = 144 \times 10^{24} \text{ кгм}^2/\text{с}$, то есть западный перенос преобладает и атмосфера в целом вращается с запада на восток быстрее, чем Земля. Это есть количественное выражение так называемой суперротации атмосферы. Анализ сезонного хода показывает, что в июле h_3 минимально, что, учитывая однозначную связь с ω , приводит к тому, что скорость вращения должно быть в это время максимальна, а продолжительность суток несколько короче среднегодовых.

Следует оговориться, что с формальной точки зрения ситуация, математически выражаемая формулой (3.8.13), совсем не ясна. В самом деле, данное выражение устанавливает лишь то обстоятельство, что поведение двух величин h_3 и ω синхронно, однако нет оснований говорить о том, что именно изменения общей циркуляции атмосферы приводят к изменениям ω . С формальных позиций можно утверждать и обратное.

Для того, чтобы разобраться с этой принципиальной проблемой, рассмотрим результаты численных экспериментов на моделях общей циркуляции атмосферы. В рамках проекта AMIP1 модели интегрировались на период 1979–1988 гг., при задаваемом ежемесячно наблюдаемом распределении температуры поверхности океана и положении границы морских льдов. В работе [Hide, et al., 1997] по данным всех моделей за все годы рассчитаны значения глобально осредненного относительного момента, которые сопоставлены с аналогичными величинами, определенными по данным реанализа. Результат получился однозначным – поведение во времени среднего по моделям значения практически совпало с наблюдаемым. Поскольку в моделях вариации угловой скорости не создавались, можно, следовательно, считать, что именно относительный момент (то есть вариации циркуляции) является причиной,

вызывающей изменения ω . Таким образом, именно аномалии атмосферных движений ускоряют или замедляют вращение планеты, а не наоборот.

На рис. 3.8.1 показан спектр колебаний величины h_3 , построенный по данным реанализа поля ветра с разрешением в $\frac{1}{4}$ суток [Луценко, 2003]. В силу сделанных замечаний он должен характеризовать главные особенности спектра угловой скорости вращения. Спектр имеет вид, который на внутригодовых частотах хорошо соответствует закону красного шума, то есть представлениям о реализации винеровского процесса, описываемого уравнением (3.8.5). Однако при переходе к межгодовой изменчивости форма спектра выполаживается, что указывает на то, что здесь начинают проявляться обратные связи, ограничивающие возможность неограниченного роста скорости ветра в атмосфере. Возможно, что эти ограничения связаны с четкой выраженностью годового цикла в поведении общей циркуляции атмосферы. Таким образом, картина выглядит следующим образом: на интервале от межсуточных до сезонных частот в вариациях угловой скорости проявляются хаотические, устроенные по закону красного шума, воздействия поля ветра. На годовых и более низких частотах на спектре виден переход к белому шуму, то есть наступает стабилизация. Однако это происходит не по ланжевеновскому алгоритму, а из-за того, что дисперсия скорости ветра на этих масштабах уже не растет.

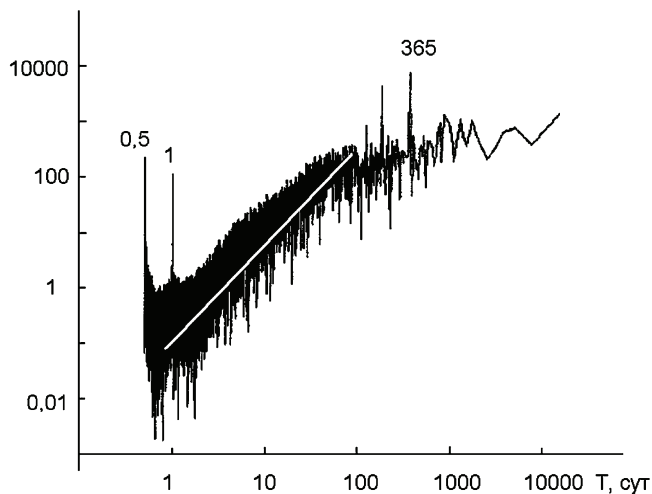


Рис. 3.8.1. Спектр ряда h_3 . По оси абсцисс отложены периоды колебаний в сутках, по оси ординат – логарифм спектральной плотности в относительных единицах. Белая линия соответствует закону красного шума. Цифрами маркированы отдельные пики, соответствующие полусуточной, суточной и годовой изменчивости.

ГЛАВА 4. ОБОБЩЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА И МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

4.1. Вывод обобщенных соотношений Ланжевена методом проекционных операторов

Прямое применение стохастических дифференциальных уравнений для описания флуктуаций в быстрой подсистеме в рамках первой версии теории стохастических моделей климата К. Хассельманна [Hasselmann, 1976] не представляется возможным ввиду того, что спектр изменчивости быстрой X -подсистемы содержит короткопериодный интервал, существующий и помимо эффектов ее взаимодействия с медленной Y -подсистемой. Первая версия теории позволяла рассчитывать только низкочастотный отклик медленных переменных на короткопериодные внешние воздействия со стороны быстрых (не исключая и иные внешние воздействия). Для быстрых переменных эффекты взаимодействия подсистем проявляются на временах реакции медленных переменных на внешнее возбуждение. В этом возбуждении содержится и стохастический вклад от случайных короткопериодных воздействий быстрых переменных – белый шум, которому соответствует постоянный в области низких частот спектр. Задача о «броуновском движении» инерционных элементов, рассмотренная в главе 2, для малоинерционных объектов трансформируется в задачу определения вклада в ее низкочастотную изменчивость индуцированных короткопериодными флуктуациями в X -подсистеме движений в медленной Y -подсистеме.

Эту новую постановку задачи иллюстрирует схема проведения численных экспериментов с моделями общей циркуляции атмосферы и климата, принятая в современных исследованиях и схематически изображенная на рис. 4.1.1. В интерактивном эксперименте решается полная система (2.1.1)–(2.1.2), в неинтерактивном – только уравнения быстрой подсистемы (2.1.2) с заданными Y [Delworth, Manabe, 1987, 1988, 1993; Salmon, Hendershort, 1976]. В верхней части рисунка схематически приведен спектр флуктуаций в быстрой подсистеме для неинтерактивного эксперимента. На высоких частотах спектр может содержать и некоторые пики, соответствующие колебательным модам собственных движений быстрой подсистемы. На низких частотах спектр представляет собой белый шум – константу – и в таком виде подается на вход медленной подсистемы. Однако за счет взаимодействия с медленной подсистемой в этом частотном диапазоне возможен рост спектральной плотности флуктуаций быстрой подсистемы. Это напоминает ситуацию с бароном Мюнхгаузеном, когда он сам вытаскивал себя и лошадь из болота.

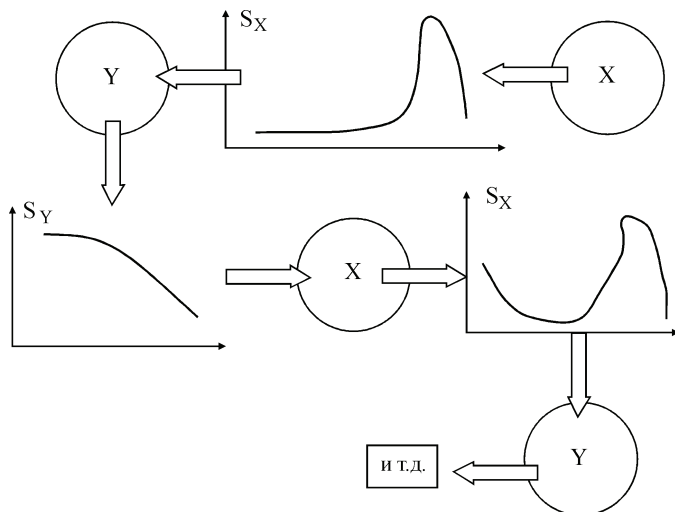


Рис. 4.1.1. Схема взаимодействия быстрой X и медленной Y подсистем, демонстрирующая перестройку спектров флуктуаций

Стрелки указывают логические этапы, рассматриваемые в тексте.

Методы неравновесной статистической механики дают возможность создать аппарат для решения нового для статистической физики класса задач. Трансформация традиционных методов применительно к решению специфических проблем теории флуктуаций природных объектов представляет собой нетривиальную задачу неравновесной статистической механики. Ее отличие от традиционной постановки иллюстрирует сравнение двух рисунков (2.1.1 и 4.1.2).



Рис. 4.1.2. Барон Мюнхгаузен, как часть быстрой подсистемы, которая сохранила память о прошлом поведении, вытаскивающий сам себя и лошадь из болота (рисунки А.В. Ракитиной).

Применение метода проекционных операторов, изложенного в главе 2 для вывода обобщенного уравнения Ланжевена (2.2.5), при построении теории взаимодействия быстрой и медленной подсистем (см. рис. 4.1.1) является естественным по ряду причин. Во-первых, флуктуации в X -подсистеме содержат как быструю, так и медленную составляющие, так что спектр этих флуктуаций может плавно изменяться от высоких частот к низким. В этом случае затруднительно говорить о разнесении временных масштабов в спектре и интеграл памяти (второй член в выражениях (2.2.4) и (2.2.5)) может играть существенную роль. Во-вторых, как будет показано далее, в достаточно общих предположениях этот интеграл напрямую связан с нестационарной функцией статистически среднего отклика быстрых переменных на аномалии медленных. В-третьих, применение аналитических методов позволяет выявить зависимость результатов численных экспериментов от принятых в моделях параметризаций.

Дополним обобщенные уравнения Ланжевена (2.2.5) для $\mathbf{Y}(t)$ обобщенным разбиением $\mathbf{X}(t)$, положив в (2.2.4) $F = X_\alpha$,

$$X_\alpha(t) = \langle X_\alpha | \mathbf{Y}(t) \rangle + \int_0^t d\tau e^{(t-\tau)\mathbf{M}} \mathbf{P} \mathbf{M} e^{\tau \mathbf{Q} \mathbf{M}} \delta X_\alpha(0) + \delta \hat{X}_\alpha(t), \quad (4.1.1)$$

где

$$\delta \hat{X}_\alpha(t) = e^{t \mathbf{Q} \mathbf{M}} \delta \mathbf{X}(0), \quad \delta \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(0) - \langle \mathbf{X} | \mathbf{Y}(0) \rangle. \quad (4.1.2)$$

Подынтегральное выражение в (2.2.4) можно преобразовать к виду [Демченко, 1989]

$$\mathbf{P} \mathbf{M} e^{\tau \mathbf{Q} \mathbf{M}} \delta F(0) = -\langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(0) \rangle [D_i F(\tau, \mathbf{Y}(0))], \quad (4.1.3)$$

вводя функции

$$[D_i F(\tau, \mathbf{Y})] = \left\langle \frac{\partial \ln(\rho_S)}{\partial Y_i} e^{\tau \mathbf{Q} \mathbf{M}} \delta F | \mathbf{Y} \right\rangle. \quad (4.1.4)$$

Здесь нужно сделать одно методическое замечание, важное для понимания фрагментов теории, развиваемой в дальнейшем. В соотношении (4.1.4) функции $[D_i F]$ определяются во всем диапазоне изменения переменных $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$ (переменные быстрой подсистемы входят при определении условного среднего в правой части (4.1.4)) независимо от их конкретных начальных значений в (4.1.1) – (4.1.4). Далее будет показано, что эти функции тесно связаны, как флуктуационно-диссипативные соотношения, с функциями отклика быстрых переменных на изменение медленных [Демченко, 1989].

Чтобы доказать (4.1.3), (4.1.4) заметим, что в силу свойства $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$, $\delta F = \mathbf{Q} \delta F$ (где $\delta F = F - \langle F | \mathbf{Y} \rangle$) для интересующего нас ядра в интеграле памяти соотношения (2.4.4) и в (4.1.1) имеем

$$\mathbf{P}M e^{\tau \mathbf{Q}M} \delta F = \mathbf{P}M Q e^{\tau \mathbf{Q}M} \delta F. \quad (4.1.5)$$

Действие оператора $\mathbf{P}M Q$ на произвольную функцию $f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, в силу определения \mathbf{P} и свойства $\mathbf{P}M_X=0$ (см. раздел 2.2), сводится к виду

$$\mathbf{P}M Q f = \mathbf{P}M_Y Q f = \langle U_i | \mathbf{Y} \rangle \int d\mathbf{X} \rho_S \partial_i Q f + \int d\mathbf{X} \rho_S \delta U_i \partial_i Q f. \quad (4.1.6)$$

Для первого слагаемого справа в (4.1.6) справедливо

$$\begin{aligned} \langle U_i | \mathbf{Y} \rangle \int d\mathbf{X} \rho_S \partial_i Q f &= \langle U_i | \mathbf{Y} \rangle \left\{ \partial_i (\mathbf{P}Q f) - \int d\mathbf{X} (Q f) \partial_i \ln \rho_S \right\} = \\ &= -\langle U_i | \mathbf{Y} \rangle \int d\mathbf{X} (Q f) \partial_i \ln \rho_S, \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

где второе равенство следует из свойства $\mathbf{P}Q=0$.

Второе слагаемое в (4.1.6), если $\delta U_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ можно разложить на сумму сомножителей $\delta U_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{nx} \sum_{ny} A_{nx}(\mathbf{X}) B_{ny}(\mathbf{Y})$ (в такой ряд Тейлора можно разложить отклонения $\delta U_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ от средних стационарных значений переменных). Этот второй член в (4.1.6) состоит из суммы слагаемых вида $b(\mathbf{Y}) \delta a = b(\mathbf{Y})(a - \langle a | \mathbf{Y} \rangle)$. Для этих слагаемых

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{X} b(\mathbf{Y})(\delta a) \rho_S \partial_i (Q f) &= -b(\mathbf{Y}) \int d\mathbf{X} (Q f) (\delta a) \rho_S \partial_i \ln \rho_S + \\ &+ b(\mathbf{Y}) \partial_i \int d\mathbf{X} \rho_S (\delta a) (Q f) + b(\mathbf{Y}) \partial_i \langle a | \mathbf{Y} \rangle (\mathbf{P}Q f). \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Поскольку $\mathbf{P}Q=0$, последний член справа в (4.1.8) равен нулю. Коль скоро можно пренебречь зависимостью вторых куммулянтов флуктуаций в X -системе от \mathbf{Y} (второе слагаемое в правой части (4.1.8)), а также пренебречь третьими куммулянтами (первое слагаемое, которое является куммулянтом (так как $\mathbf{P}(\partial_i \ln \rho_S) = \partial_i \int \rho_S d\mathbf{X} = 0$)), то $\mathbf{P}M Q f$ определяется первым слагаемым в (4.1.6), которое, согласно (4.1.7), равно

$$\mathbf{P}M Q f = -\langle U_i | \mathbf{Y} \rangle \left\langle \frac{\partial \ln \rho_S}{\partial Y_i} Q f | \mathbf{Y} \right\rangle. \quad (4.1.9)$$

Из (4.1.9) и (4.1.4) при $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}(0)$ следует искомое соотношение (4.1.3).

Учитывая, что действие оператора $e^{(t-\tau)\mathbf{M}} \mathbf{P} f$ на любую функцию f переводит ее в условное среднее $\langle f | \mathbf{Y}(t-\tau) \rangle$ (\mathbf{M} – оператор эволюции всей системы), обобщенные соотношения Ланжевена покомпонентно теперь можно записать в виде системы дифференциальных уравнений для $Y_i(t)$

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = \langle U_i | \mathbf{Y}(t) \rangle - \int_0^t d\tau \langle U_j | \mathbf{Y}(t-\tau) [D_j U_i(\tau, \mathbf{Y}(t-\tau))] + \delta \hat{U}_i(t) \quad (4.1.10)$$

и обобщенных разбиений для $X_\alpha(t)$

$$X_\alpha(t) = \langle X_\alpha | \mathbf{Y}(t) \rangle - \int_0^t d\tau [D_j X_\alpha(\tau, \mathbf{Y}(t-\tau))] \langle U_j | \mathbf{Y}(t-\tau) \rangle + \delta \hat{X}_\alpha(t), \quad (4.1.11)$$

где

$$\delta \hat{U}_i(t) = e^{t\mathbf{QM}} \delta U_i(0), \quad \delta \hat{X}_\alpha(t) = e^{t\mathbf{QM}} \delta X_\alpha(0). \quad (4.1.12)$$

Напомним, что при выводе (4.1.10), (4.1.11) предполагалось, что при осреднении по быстрым переменным можно пренебречь: а) зависимостью вторых кумулянтов быстрых переменных от \mathbf{Y} при определении только этих фрагментов теории, что не исключает ее учета при аппроксимации интенсивности случайных источников, б) вкладом третьих кумулянтов быстрых переменных в генерацию медленных движений, что не отвергает их роли в установлении статистически равновесного состояния X -системы при $\mathbf{Y}=\text{const}$.

Как связана статистика случайных источников, а также функций памяти в (4.1.8)–(4.1.10) со статистикой $\mathbf{X}_0(t)$ – решения задачи Коши только для X -системы при фиксированных $Y_i = \text{const}$ (с оператором эволюции $\mathbf{M}_X = u_\alpha \partial_\alpha$). Рассмотрим частный случай, когда действие быстрых переменных на медленные линейно зависит от $\delta \mathbf{X}$,

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = \langle U_i | \mathbf{Y}(t) \rangle + \Gamma_{i\alpha} \delta X_\alpha(t). \quad (4.1.13)$$

Добавление в правую часть нелинейных слагаемых вида $\varphi(\mathbf{X})$ не меняет дальнейших результатов, коль скоро φ статистически не зависят от \mathbf{Y} , например $\partial_i \langle \varphi | \mathbf{Y} \rangle = 0$. Матрица $[D_i X_\alpha(0, \mathbf{Y})]$ равна стационарной матрице чувствительности условных средних $\langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle$ к вариациям \mathbf{Y} , определяемой по статистике $\mathbf{X}_0(t)$ при произвольном, но заданном \mathbf{Y} . Действительно, согласно (4.1.4) при $\tau=0$

$$\begin{aligned} [D_i X_\alpha(0, \mathbf{Y})] &= \int d\mathbf{X} X_\alpha \partial_i \rho_S - \int d\mathbf{X} \langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle \partial_i \rho_S = \\ &= \partial_i \langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle - \langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle \partial_i \int \rho_S d\mathbf{X} = \partial_i \langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle, \end{aligned} \quad (4.1.4a)$$

где учтено условие нормировки для плотности вероятностей. В традиционном приближении (см., например, Mazo, 1978) при вычислении интегралов памяти (как и любых выражений, содержащих осреднение по \mathbf{X}) полагается $\mathbf{QM} \approx \mathbf{M}_X$ (см. комментарий к формулам (2.2.5a, б)). Тогда основной фрагмент теории (4.1.4), определяющий запаздывание в обобщенных соотноше-

ниях Ланжевена, также определяется по статистике $\mathbf{X}_0(t)$ и выражается через нестационарную функцию чувствительности $[\mathbf{X}^{(\tau)}]_i$ [Демченко, 1989]:

$$[\mathbf{X}^{(\tau)}]_i = \left\langle \frac{\partial \ln(\rho_S)}{\partial Y_i} e^{\tau \mathbf{M}_X} \delta \mathbf{X} | \mathbf{Y} \right\rangle \approx [D_i \mathbf{X}(\tau, \mathbf{Y})]. \quad (4.1.14)$$

При описании поведения функций отклика и временных корреляционных функций быстрой подсистемы в дальнейшем в этом разделе мы будем использовать верхний индекс (τ) для обозначения времени запаздывания и времени корреляции. Функции $[F^{(\tau)}]_i$ тесно связаны с $\langle \Delta F^{(\tau)}(\mathbf{Y}, \Delta \mathbf{Y}) \rangle$ – функциями статистически среднего отклика X -системы (например, атмосферы) на постоянное возмущение $\Delta \mathbf{Y}$ (например, аномалий ТПО), т.е. со средним по множеству реализаций решения задачи о приспособлении X -системы, находившейся при $\tau < 0$ в состоянии статистического равновесия с $\mathbf{Y}_1(\tau < 0) = \text{const}$, к новому состоянию с $\mathbf{Y}_2(\tau \geq 0) = \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}(\infty) = \text{const}$:

$$[F^{(\tau)}]_i = \frac{\partial}{\partial \Delta Y_i} \left\langle \Delta F^{(\tau)}(\mathbf{Y}, \Delta \mathbf{Y}) \right\rangle_{\Delta \mathbf{Y} = 0}. \quad (4.1.15)$$

Схематически для одной переменной результат такого эксперимента изображен на рис. 4.1.3.

Действительно, после наложения стационарного возмущения $\Delta \mathbf{Y}$ плотность вероятностей X -системы $\rho_X^{(\tau)}$ эволюционирует к новому стационарному распределению ρ_{S2} , подчиняясь уравнению Лиувилля

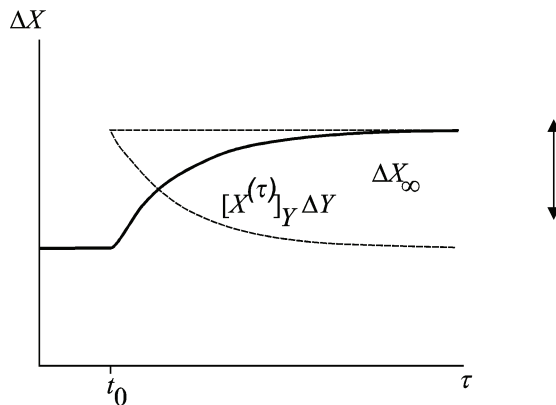


Рис. 4.1.3. Отклик переменной X на включенное в момент времени t_0 постоянное возмущение ΔY (сплошная линия)

Пунктирная кривая – искомая функция памяти (4.1.15).

$$\partial_{\tau} \rho_X^{(\tau)} = \mathbf{L}_{X2} \rho_X^{(\tau)}, \quad (4.1.16)$$

где \mathbf{L}_{X2} – оператор Лиувилля X -системы (1.1.4) при $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_2$, с начальным условием $\rho_X^{(0)} = \rho_{S1}$. Поскольку $\mathbf{L}_{X2} \rho_{S2} = 0$, эволюция $\Delta \rho_X^{(\tau)} = \rho_{S2} - \rho_X^{(\tau)}$ также подчиняется уравнению Лиувилля (4.1.16) с начальным условием $\Delta \rho_X^{(0)} = \rho_{S2} - \rho_{S1} = \Delta \rho_S$, решением которого является

$$\Delta \rho_X^{(\tau)} = e^{\tau \mathbf{L}_{X2}} \Delta \rho_S. \quad (4.1.17)$$

Отклонение статистически среднего отклика любой функции F от ее конечного значения $\langle \Delta F^{(\tau)}(\mathbf{Y}_1, \Delta \mathbf{Y}) \rangle$ в силу сопряженности операторов \mathbf{M}_X и \mathbf{L}_X ($\int d\mathbf{X} g \mathbf{L}_X f = \int d\mathbf{X} f \mathbf{M}_X g$) можно вывести из (4.1.17)

$$\langle \Delta F^{(\tau)} \rangle = \int dX \Delta \rho_S e^{\tau \mathbf{M}_{X2}} F. \quad (4.1.18)$$

Если $\langle \Delta F^{(\tau)}(\mathbf{Y}_1, \Delta \mathbf{Y}) \rangle$ дифференцируемо по $\Delta \mathbf{Y}$ в нуле, то согласно (4.1.18)

$$\lim_{\Delta \mathbf{Y} \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta F^{(\tau)} \rangle}{\Delta \mathbf{Y}} = \left\langle \frac{\partial \ln \rho_S}{\partial \mathbf{Y}_2} e^{\tau \mathbf{M}_{X2}} F \mid \mathbf{Y}_2 \right\rangle, \quad (4.1.19)$$

так как $\partial \Delta \rho_{S2} / \partial \Delta \mathbf{Y} = \partial \rho_{S2} / \partial \mathbf{Y}_2 = \partial \ln \rho_{S2} / \partial \mathbf{Y}_2$. Полагая $\mathbf{Y}_2 = \mathbf{Y}$, получим соотношение между среднестатистическим откликом и нестационарной функцией чувствительности – соотношение (4.1.15).

Зачастую среднестатистический отклик (в отличие от единичной реализации) можно рассчитать по линейной модели

$$\frac{d \langle \Delta X_{\alpha}^{(\tau)} \rangle}{d\tau} = -(B_0)_{\alpha\beta} \langle \Delta X_{\beta}^{(\tau)} \rangle + A_{\alpha i} \Delta Y_i, \quad \langle \Delta \mathbf{X}^{(0)} \rangle = 0, \quad (4.1.20)$$

решение которой и задает искомую матрицу нестационарной чувствительности для X_{α} :

$$\left[X_{\alpha}^{(\tau)} \right]_i = \{ e^{-\tau \mathbf{B}_0} (\mathbf{B}_0)^{-1} \mathbf{A} \}_{\alpha i} = e^{-\tau \mathbf{B}_0} [\mathbf{X}^{(0)}]_i. \quad (4.1.21)$$

Квадратная матрица $(B_0)_{\alpha\beta}$ действует на столбцы матрицы $[X_\alpha^{(0)}]_i$ как на векторы.

Введем поправки к традиционному приближению, применяемому при вычислении функции отклика (4.1.4). Для этого при аппроксимации действия оператора $\mathbf{QM} = \mathbf{M}_X + \mathbf{QM}_Y$ учтем действие оператора \mathbf{QM}_Y . Учет оператора \mathbf{QM}_Y при вычислении $[D_i \mathbf{X}(\tau, \mathbf{Y})]$, как видно из (4.1.4а), не меняет значение функции чувствительности при $\tau=0$: $[D_i \mathbf{X}(0, \mathbf{Y})] = \partial_i \langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle = [\mathbf{X}^{(0)}]_i$. Пусть учет \mathbf{QM}_Y в операторе $\exp(\tau \mathbf{QM})$ приводит к замене матрицы \mathbf{B}_0 на $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \Delta \mathbf{B}$ в формуле (4.1.14) таким образом, что $[D_i \mathbf{X}(\tau, \mathbf{Y})] = e^{-\tau(\mathbf{B}_0 + \Delta \mathbf{B})} [\mathbf{X}^{(0)}]_i$. Вместо (4.1.14), (4.1.21) при аппроксимации функций памяти в (4.1.4) при $F=X_\alpha$ примем уточненное приближение

$$[D_i \mathbf{X}(\tau, \mathbf{Y})] = \left\langle \frac{\partial \ln \rho_S}{\partial Y_i} e^{\tau(\mathbf{M}_X + \mathbf{QM}_Y)} \delta \mathbf{X} | \mathbf{Y} \right\rangle \approx e^{-\tau(\mathbf{B}_0 + \Delta \mathbf{B})} [\mathbf{X}^{(0)}]_i. \quad (4.1.14a)$$

Далее матрицу $\Delta \mathbf{B}$ определим, продифференцировав (4.1.14а) по времени при $\tau=0$ и приравняв производные от точного и приближенного выражений. Дифференцирование по времени первого равенства в 4.1.14 с учетом (4.1.21) приводит к соотношению $-\mathbf{B}_0 [\mathbf{X}^{(0)}]_i = \langle (\partial_i \ln \rho_S) \mathbf{M}_X \delta \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle$. С учетом этого дифференцирование (4.1.14а) приводит к соотношению для элементов матрицы $\Delta \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} -(\Delta B)_{\alpha\beta} \partial_i \langle X_\beta | \mathbf{Y} \rangle &= \langle (\partial_i \ln \rho_S) \mathbf{QM}_Y \delta X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle = \\ &= -\partial_j \langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle \cdot \langle (\partial_i \ln \rho_S) \mathbf{QU}_j | \mathbf{Y} \rangle. \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

Второе из равенств в (4.1.22) учитывает, что оператор \mathbf{QM}_Y действует только на функции от \mathbf{Y} , то есть в δX_α – только на $\langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle$. В результате этого действия не зависящая от \mathbf{X} функция может быть вынесена за знак взятия условного среднего. Далее учтем, что, поскольку согласно (4.1.13), $\mathbf{QU}_j = \delta U_j = \Gamma_{j\beta} \delta X_\beta$, то

$$(\Delta B)_{\alpha\beta} \partial_i \langle X_\beta | \mathbf{Y} \rangle = \Gamma_{j\beta} \partial_j \langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle \cdot \langle (\partial_i \ln \rho_S) \delta X_\beta | \mathbf{Y} \rangle. \quad (4.1.23)$$

Поскольку последний сомножитель в правой части (4.1.23) есть не что иное, как $\partial_i \langle X_\beta | \mathbf{Y} \rangle$, из (4.1.23) следует, что $(\Delta B)_{\alpha\beta} = \Gamma_{j\beta} \partial_j \langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle$ или, вводя матрицу стационарного отклика \mathbf{X}_Y с элементами $[X_\alpha]_i = \partial_i \langle X_\alpha | \mathbf{Y} \rangle$, окончательно

$$\Delta \mathbf{B} = \mathbf{B} - \mathbf{B}_0 = [\mathbf{X}]_Y \cdot \Gamma, \quad (4.1.24)$$

где $[\mathbf{X}]_Y$ – матрица размерности $(N_X \times N_Y)$ с элементами $[X_\alpha]_i$.

Полученные выражения для функций $[D_i X_\alpha(\tau, \mathbf{Y})]$ не зависят от \mathbf{Y} . Поэтому в принятом приближении входящие в (4.1.11) в интегралы памяти функции $[D_i X_\alpha(\tau, \mathbf{Y}(t-\tau))] = [D_i X_\alpha(\tau)]$ зависят только от времени. Теперь перейдем в (4.1.11) от оригиналов к изображению по Лапласу [Лаврентьев, Шабат, 1973] $\mathbf{X}(t) \leftrightarrow \mathbf{X}^*(p)$

$$\mathbf{X}^* = \langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle^* - \frac{1}{p + \mathbf{B}_0 + \Delta \mathbf{B}} [\mathbf{X}]_Y \cdot \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y} \rangle^* + \delta \hat{\mathbf{X}}^*. \quad (4.1.25)$$

При переходе от (4.1.11) к (4.1.25) мы воспользовались отмеченным выше свойством подынтегральных функций и теоремой о свертке.

Из (4.1.25) и (4.1.11) следует, что

$$\begin{aligned} (p + \mathbf{B}_0) \delta \mathbf{X}^* + \Delta \mathbf{B} \delta \mathbf{X}^* &= \\ &= -[\mathbf{X}]_Y \cdot \left(\frac{d\mathbf{Y}}{dt} \right)^* + [\mathbf{X}]_Y \Gamma \delta \hat{\mathbf{X}}^* + (p + \mathbf{B}_0 + \Delta \mathbf{B}) \delta \hat{\mathbf{X}}^*. \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

Подставляя в (4.1.26) $\Delta \mathbf{B}$ из (4.1.24) и применяя к полученному соотношению $(p + B_0)^{-1}$, получим

$$\mathbf{X}^* = \langle \mathbf{X} | \mathbf{Y} \rangle^* - \frac{1}{p + \mathbf{B}_0} [\mathbf{X}]_Y \cdot \left(\frac{d\mathbf{Y}}{dt} \right)^* + \left\{ \frac{1}{p + \mathbf{B}_0} [\mathbf{X}]_Y \Gamma \delta \hat{\mathbf{X}}^* \right\}. \quad (4.1.27)$$

Совершая в (4.1.27) переход к оригиналам и учитывая (4.1.13), получим

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(t) \rangle - \int_0^t d\tau \Gamma \cdot [\mathbf{X}^{(t-\tau)}]_Y \cdot \frac{d\mathbf{Y}}{d\tau} + \Delta \hat{\mathbf{U}}(t), \quad (4.1.28)$$

$$\mathbf{X}(t) = \langle \mathbf{X} | \mathbf{Y}(t) \rangle - \int_0^t d\tau [\mathbf{X}(t-\tau)]_Y \cdot \frac{d\mathbf{Y}(\tau)}{d\tau} + \Delta \hat{\mathbf{X}}(t), \quad (4.1.29)$$

$$\Delta \hat{\mathbf{X}}(t) = \delta \hat{\mathbf{X}}(t) - \int_0^t d\tau [\mathbf{X}(t-\tau)]_Y \cdot \Gamma \cdot \delta \mathbf{X}(\tau), \quad \Delta \hat{\mathbf{U}}(t) = \Gamma \cdot \Delta \hat{\mathbf{X}}(t). \quad (4.1.30)$$

Интегралы памяти в (4.1.28), (4.1.29) отличаются от аналогичных, получаемых в (4.1.10), (4.1.11) при $\mathbf{QM} = \mathbf{M}_X$ заменой $\mathbf{U}(t)$ на $d\mathbf{Y}(t)/dt$. Именно в таком виде (по рекомендации А.М. Обухова) аппроксимируются диссипативные члены в каскадных системах гидродинамического типа [Гледзер, Макаров, 1985]. Интересно, что для классической задачи о релаксации импульса тяжелой броуновской частицы замена $\langle d\mathbf{R}/dt | \mathbf{P}, \mathbf{R} \rangle$ на $d\mathbf{R}/dt$ (\mathbf{P} и \mathbf{R} ее импульс и координата) не приводит к замене диссипативного члена в уравнении Ланжевена, поскольку $d\mathbf{R}/dt = \mathbf{P} = \langle \mathbf{P} | \mathbf{P}, \mathbf{R} \rangle$.

Также можно показать [Демченко, 1989], что корреляционная матрица $\langle \Delta \hat{X}_\alpha(\tau) \Delta \hat{X}_\beta(0) | \mathbf{Y} \rangle$ совпадает с аналогичной матрицей, полученной из статистики X -системы при $\mathbf{Y} = \text{const}$, коль скоро для флуктуаций в X -системе выполняются флуктуационно-диссипативные соотношения [Демченко, 1989]. Пусть корреляционная матрица в X -системе при $\mathbf{Y} = \text{const}$ экспоненциально спадает, как

$$(\mathbf{D}(\tau))_{\alpha\beta} = \langle \delta X_\alpha e^{\tau \mathbf{M}_X} \delta X_\beta | \mathbf{Y} \rangle = (e^{-\tau \mathbf{\Omega}_0})_{\alpha\beta}. \quad (4.1.31)$$

В (4.1.31) $\mathbf{\Omega}$ – квадратная матрица. Вычислим поправки к $(\hat{D}(\tau))_{\alpha\beta} = \langle \delta X_\alpha e^{\tau \mathbf{QM}} \delta X_\beta | \mathbf{Y} \rangle$ тем же методом, что и поправки к функции памяти. В тех же предположениях, в которых было получено (4.1.24):

$$\hat{\mathbf{D}}(\tau) = e^{-\tau \mathbf{\Omega}} \cdot \mathbf{D}(0), \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_0 + [\mathbf{X}]_Y \Gamma. \quad (4.1.32)$$

Определяя теперь корреляционную функцию источников в (4.1.28)–(4.1.30), используем формулу (4.1.32), преобразованную с помощью тождества Мори (2.2.3). Тогда

$$\begin{aligned} \langle \Delta \hat{X}_\alpha \Delta \hat{X}_\beta(t) | \mathbf{Y} \rangle &= (\mathbf{D}(t))_{\alpha\beta} + \\ &+ \int_0^t d\tau \{ (e^{-\tau \mathbf{B}_0} - e^{-\tau \mathbf{\Omega}}) [\mathbf{X}]_Y \Gamma \hat{\mathbf{D}}(t-\tau) \}_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (4.1.33)$$

Если для флуктуаций в X -системе при $\mathbf{Y}=\text{const}$ выполняются флуктуационно-диссипативные соотношения, то есть $\mathbf{\Omega}=\mathbf{B}_0$, второе слагаемое в (4.1.33) обращается в нуль и корреляционная матрица источников в (4.1.28)–(4.1.30) совпадает с аналогичной для флуктуаций $\mathbf{X}_0(t)$ при $\mathbf{Y}=\text{const}$.

Соотношения (4.1.20), (4.1.21) в совокупности с отмеченным свойством корреляционной матрицы короткопериодных случайных источников позволяют трансформировать (4.1.28), (4.1.29) в эквивалентную систему стохастических уравнений. Для малых флуктуаций $\Delta\mathbf{Y}$ и $\Delta\mathbf{X}$ относительно их средних стационарных значений случайные спектральные меры $d\mathbf{Y}^{(\omega)}(\omega, d\omega)$ и $d\mathbf{X}^{(\omega)}(\omega, d\omega)$ – разложения $\Delta\mathbf{Y}$ и $\Delta\mathbf{X}$ в интеграл Фурье–Стилтьеса [см., например, Монин, Яглом, 1967], как можно показать из (4.1.20), (4.1.21), (4.1.28) и (4.1.29), удовлетворяют системе стохастических уравнений

$$i\omega d\mathbf{Y}^{(\omega)} = d\mathbf{U}^{(\omega)} = d\langle \mathbf{U} | \mathbf{Y} \rangle^{(\omega)} + d(\delta\mathbf{U})^{(\omega)}, \quad (4.1.34)$$

$$d\mathbf{X}^{(\omega)} = (i\omega + \mathbf{B}_0)^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{Y}^{(\omega)} + d\mathbf{X}_0^{(\omega)}. \quad (4.1.35)$$

В (4.1.34), (4.1.35), согласно (4.1.13),

$$d(\delta\mathbf{U})^{(\omega)} = \mathbf{\Gamma} \delta(d\mathbf{X}_0^{(\omega)}), \quad (4.13a)$$

при этом $\mathbf{S}_{X_0}(\omega)$ – спектр флуктуаций $\Delta\mathbf{X}$ при $\Delta\mathbf{Y}=\text{const}$ предполагается известным $\mathbf{S}_{X_0}(\omega)\delta(\omega - \omega_1) = \langle (d\mathbf{X}_0^{(\omega)}) \cdot (d\mathbf{X}_0^{(\omega)})^* \rangle$ (звездочка означает здесь комплексное сопряжение).

Если в исходных уравнениях эволюции медленной системы можно выделить линейную по \mathbf{X} часть и не зависящие от нее компоненты (как быстрые, так и медленные), тогда при аппроксимации в $d\mathbf{U}^{(\omega)}$ в (4.1.34) можно полагать $d\mathbf{X}^{(\omega)}$ из (4.1.35).

Мы умышленно не вставили в (4.1.34) расшифровку случайных короткопериодных источников. Несмотря на то, что вывод полученных стохастических уравнений был дан для частного случая линейного воздействия переменных быстрой подсистемы на медленную, в короткопериодные источники без нарушения полученных соотношений можно добавлять и дополнительные составляющие, которые не дают вклад в интеграл памяти и при вычислении корреляционной функции которых можно не учитывать действие оператора \mathbf{QM}_Y .

Обратное преобразование Фурье уравнений (4.1.34), (4.1.35) определяет эквивалентную систему стохастических дифференциальных уравнений для

описания совместной эволюции переменных медленной и быстрой подсистеме. Ее можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(t) \rangle + \delta\mathbf{U}(t), \quad (4.1.36)$$

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = -\mathbf{B}_0\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}\mathbf{Y}(t) + \mathbf{f}_X(t), \quad \mathbf{f}_X(t) = \frac{d\mathbf{X}_0(t)}{dt} + \mathbf{B}_0\mathbf{X}_0(t). \quad (4.1.37)$$

Если $\langle \mathbf{U} | \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{F}_Y(\mathbf{Y}) + \mathbf{G}\mathbf{X} + \delta\mathbf{U}_\Delta$, причем $\delta\mathbf{U}_\Delta$ не зависят от \mathbf{Y} , уравнение (4.1.36) переходит в

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(t) \rangle = \mathbf{F}_Y(\mathbf{Y}(t)) + \mathbf{G}\mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{U}_\Delta(t). \quad (4.1.36a)$$

В этой системе $\mathbf{X}_0(t)$ в уравнении (4.1.37) уже не будет дельта-коррелированным по времени случайным процессом, однако эквивалентную случайную силу $\mathbf{f}_X(t)$ можно считать таковой и находить ее интенсивность из (4.1.37). Однако для характерных времен изменения медленной подсистемы эквивалентную случайную силу, как и $\mathbf{X}_0(t)$, можно рассматривать как дельта-коррелированный случайный процесс. Именно в этом смысле построенную стохастическую систему можно считать *эквивалентной стохастической системой* – она эквивалентна исходной только в низкочастотной области.

4.2. Пример применения метода эквивалентных стохастических систем в задаче о флуктуациях глобальной температуры приземного воздуха

Полученные соотношения можно применить к «нуль-мерным» моделям энергетического баланса ЗКС, в которых потоки энергии параметризуются через температуру поверхности [Dickinson, 1981; Golitsyn, 1983]. В разделе 2.2 была рассмотрена «нуль-мерная» стохастическая энергобалансовая модель, с помощью которой исследовались малые межгодовые флуктуации некоторой эффективной температуры поверхности T_S , осредненной в пределах теплоизолированной с боковых границ области (полушария или земного шара). Для определения ее инерционности вводилась некоторая эффективная теплоемкость C , которая на самом деле соответствовала в простейшем случае теплоемкости верхнего квазиоднородного слоя океана (с учетом его доли в общей площади поверхности). Метод эквивалентных стохастических систем позволяет рассмотреть совместные флуктуации температуры поверхности океана (ТПО) ΔT_w и температуры воздуха у поверхности ΔT_a (Δ обозначает отклонения от средних стационарных значений). Например, ΔT_a может быть

среднеглобальной приземной температурой воздуха T – осредненной по поверхности Мирового океана ТПО. В пренебрежении потоком тепла через нижнюю границу верхнего квазиоднородного слоя океана (ВКС) для аномалий ТПО справедливо уравнение (3.2.1). В аномалиях потоков тепла через границу вода – воздух ΔF_{aw} можно выделить часть, связанную с аномалиями контактного теплообмена [Frankignoul, Hasselmann, 1977; Dickinson, 1981; Демченко, 1989]

$$\Delta F_w(t) = \lambda_{aw} (\Delta T_a(t) - \Delta T_w(t)) + R_w'(t) + F_{aw}'(t), \quad (4.2.1)$$

где λ_{aw} – средний коэффициент температурной чувствительности контактного теплообмена, R_w' – короткопериодные флуктуации радиационных притоков тепла к ВКС, F_{aw}' – аналогичные флуктуации контактного теплообмена, не связанные с температурой (например, из-за изменчивости скорости ветра). Для определения среднестатистического отклика температуры воздуха $\langle \Delta T_a(\tau) \rangle$ на постоянную аномалию ΔT_w используем в качестве аналога (4.1.18) простую энергобалансовую модель, применяемую для исследования чувствительности и устойчивости современного климата [Dickinson, 1981]:

$$C_a \frac{d\langle \Delta T_a(\tau) \rangle}{d\tau} = -\lambda_a \langle \Delta T_a(\tau) \rangle + f_w \lambda_{aw} \Delta T_w, \quad \lambda_a = B + f_w \lambda_{aw}. \quad (4.2.2)$$

Как и в разделе 4.1, при определении фрагментов, связанных с собственной статистикой быстрой подсистемы, используем верхний значок τ . В (4.2.2) C_a – теплоемкость столба атмосферы единичного сечения, B – коэффициент температурной чувствительности уходящей в космос тепловой радиации, f_w – доля поверхности планеты, покрытой океаном. В (4.2.2) пренебрегается отличием $\langle \Delta T_a(\tau) \rangle$, осредненной по площади океанов, от аналогичного среднего для всей области, т.е. среднестатистически атмосфера считается хорошо перемешанной. Из (3.2.1), (4.2.1) и (4.2.2) следует спектральная версия обобщенных соотношений (4.1.34), (4.1.35) для данной модели

$$dT_a(\omega) = dT_{a0}(\omega) + \frac{f_w \lambda_{aw}}{i\omega C_a + \lambda_a} dT_w(\omega), \quad dT_w(\omega) = \frac{dF_{w0}(\omega)}{i\omega C_w + \tilde{\lambda}_\Sigma(\omega)}, \quad (4.2.3)$$

где

$$\tilde{\lambda}_\Sigma(\omega) = \frac{\lambda_{aw}(i\omega C_a + \lambda_R)}{i\omega C_a + \lambda_a}, \quad dF_{w0}(\omega) = dR_{w0}(\omega) + dF_{aw0}(\omega) + \lambda_{aw} dT_{a0}(\omega). \quad (4.2.4)$$

В (4.2.3), (4.2.4) нижний индекс «0» относится к флуктуациям в атмосфере при $\Delta T_w = 0$, то есть к неинтерактивному эксперименту на рис. 4.1.2. Спектры аномалий потоков в (4.2.4) соответствуют спектральному разложению соотношения (4.2.1). При среднеглобальных оценках $\lambda_{aw} = 45 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ и $C_w = 3.2 \text{ Дж/м}^2\text{К}$ [Dickinson, 1981], $B = 1.8 \text{ Вт/м}^2\text{К}$ [Агаян и др., 1985] $\lambda_{aw}/B = 25$ и B становится сравнимой с $f_w \lambda_{aw}$ при $f_w \leq 0.04$. Поэтому для среднеглобального $f_w = 0.7$ в (4.2.3), (4.2.4) можно считать $\lambda_a \approx f_w \lambda_{aw}$. Если приближенно полагать, что на поверхности суши выполняется соотношение стационарного теплового баланса, то спектральная форма уравнения синоптических пульсаций теплосодержания атмосферного столба $dH_{a0}^{(\omega)}$ при $\omega \ll \tau_a^{-1}$

$$dR_{\Sigma 0}^{(\omega)} - f_w dF_{w0}^{(\omega)} = i\omega dH_{a0}^{(\omega)} \approx 0, \quad (4.2.5)$$

где R_{Σ} – радиационный баланс на верхней границе атмосферы. Учитывая, что $C_a/C_w \ll 1$ и $B \ll f_w \lambda_{aw}$, из (4.2.3)–(4.2.5) при $\omega \ll \tau_a^{-1}$ следует

$$dT_a^{(\omega)} = dT_{a0}^{(\omega)} + \frac{dR_{\Sigma 0}^{(\omega)}}{i\omega C_{\Sigma} + \lambda_R}, \quad C_{\Sigma} = f_w C_w + C_a, \quad (4.2.6)$$

$$dR_{\Sigma 0}^{(\omega)} = f_w dR_{w0}^{(\omega)} - (1 - f_w) dR_{s0}^{(\omega)} - dR_{a0}^{(\omega)}. \quad (4.2.7)$$

В (4.2.6), (4.2.7) C_{Σ} – интегральная эффективная теплоемкость системы, $dR_{a0}^{(\omega)}$ – спектральная мера синоптических флуктуаций радиационного потока тепла к единичному столбу атмосферы, $dR_{s0}^{(\omega)}$ – аналогичная величина для радиационного баланса поверхности суши, множители $(1 - f_w)$ и f_w учитывают локализацию отдельных слагаемых над сушей и океаном. Именно синоптические флуктуации $dR_{\Sigma 0}$ согласно (4.2.6) определяют низкочастотные изменения спектра T_a на частотах $\omega \ll \tau_{\Sigma}^{-1} = B/C_{\Sigma}$. При выбранных значениях параметров $\tau_{\Sigma} = 3.5$ года. Учет интеграла памяти приводит к замене теплоемкости $C = C_w f_w$ на $C = C_w f_w + C_a$. При выбранных значениях для

параметров среднеглобальной модели эта поправка не превышает 5%, однако, например, при $f_w = 0,2$ она уже достигает 25%.

Если пренебречь корреляцией между $dT_{a0}(\omega)$ и $dR_{\Sigma 0}(\omega)$, то спектр флуктуаций среднеглобальной температуры воздуха $S_a(\omega)$ согласно (4.2.6) распадается на сумму двух слагаемых, одно из которых есть спектр синоптических флуктуаций температуры $S_{a0}(\omega)$, который при $\omega \gg \tau_{\Sigma}^{-1}$ ведет себя, как спектр белого шума. В итоге

$$S_a(\omega) = S_{a0}(\omega) \left[1 + \beta_R^2 \frac{1}{(\omega \tau_{\Sigma})^2 + 1} \right], \quad \beta_R^2 = \frac{S_{R0}(0)}{B^2 S_{a0}(0)}. \quad (4.2.8)$$

В (4.2.8) $S_{R0}(\omega)$ – спектр синоптических флуктуаций радиационного баланса, также учтено, что при $\omega \gg \tau_a^{-1}$: $S_{a0}(\omega) = S_{a0}(0)$, $S_{R0}(\omega) = S_{R0}(0)$.

Коэффициент β_R – важный безразмерный параметр синоптической изменчивости. Оценим, как зависит от него интенсивность межгодовых флуктуаций ΔT_a . Зная спектр (4.2.8), дисперсию сглаженной по периоду τ_* величины $\Delta T_a^{(sm)}(t, \tau_*)$ можно определить стандартными методами [см., например, Leith, 1973]. Для случайной величины $Z(t)$ с экспоненциально спадающей корреляционной функцией $K_Z(\tau) = \sigma_Z^2 \exp(-\tau/\tau_Z)$ дисперсия сглаженной величины будет равна

$$\left\langle \left(\Delta Z_a^{(sm)} \right)^2 \right\rangle = \sigma_Z^2 \psi \left(\frac{\tau_*}{\tau_Z} \right), \quad \psi(x) = \frac{2}{x} \left\{ 1 + \frac{1}{x} [\exp(-x) - 1] \right\}. \quad (4.2.9)$$

Второе слагаемое в (4.2.8) с учетом определения β_R^2 равно спектру флуктуаций глобально осредненной температуры под действием синоптических флуктуаций радиационного баланса при условии, что эффективная теплоемкость равна C_{Σ} , а коэффициент обратной связи равен B [Демченко, 1982]. Дисперсия флуктуаций температуры, которая соответствует этому спектру, равна

$$\sigma_T^2 = \frac{\sigma_{R0}^2 \tau_{R0}}{C_{\Sigma} B} = \frac{\beta_R^2 B \sigma_{T0}^2 \tau_{T0}}{C_{\Sigma}} = \beta_R^2 \frac{\tau_{T0}}{\tau_{\Sigma}} \sigma_{T0}^2. \quad (4.2.10)$$

Для дисперсии сглаженных по периоду τ_* глобально осредненных температур из (4.2.8)–(4.2.10) следует

$$\left\langle \left(\Delta T_a^{(sm)} \right)^2 \right\rangle = \sigma_{T0}^2 \left\{ \psi\left(\frac{\tau_*}{\tau_{T0}}\right) + \beta_R^2 \frac{\tau_{T0}}{\tau_\Sigma} \psi\left(\frac{\tau_*}{\tau_\Sigma}\right) \right\}. \quad (4.2.11)$$

В (4.2.11) σ_{T0}^2 и τ_{T0} – дисперсия и время корреляции синоптических флуктуаций температуры. В таблице 4.2.1 представлены результаты расчетов по формуле (4.2.11) величины σ_T^2 (1 год)/ σ_{T0}^2 (1 год) – дисперсии межгодовых флуктуаций T_a , нормированных на σ_{T0}^2 (1 год) – дисперсию межгодовых флуктуаций в отсутствие аномалий ТПО – при различных β_R . Для τ_{T0} здесь принимается оценка $\tau_{T0} = 5$ сут [Manabe, Hann, 1985].

Таблица 4.2.1. Значения дисперсии межгодовой изменчивости средней глобальной температуры, нормированной на ее величину, рассчитанную для случая отсутствия взаимодействия флуктуаций в атмосфере и океане

β_R	0	1	2	5	10
$\sigma_T^2 / \sigma_{T0}^2$	1	1,45	2,8	12,25	46

Параметр β_R можно оценить по данным о синоптической изменчивости радиационного баланса и температуры воздуха. По результатам обработки спутниковых данных о синоптических флуктуациях компонент радиационного баланса [Hartmann, Short, 1980] в среднем за год глобально осредненная оценка стандартного отклонения локальных синоптических флуктуаций радиационного баланса на верхней границе атмосферы составляет $\sigma_{R0}^{(loc)} = 40 \text{ Вт/м}^2$ [Демченко, 1982]. Дисперсию глобально осредненной величины σ_{R0} можно грубо оценить в предположении, что поле локальных флуктуаций $R_\Sigma^{(loc)}$ является статистически однородным на сфере [Демченко, 1980, 1982, 1983]. В случае, если радиус корреляции этого поля r_k мал по сравнению с радиусом Земли a можно воспользоваться формулой (2.2.18). Тогда при выбранных в разделе 2.2 значения параметров, принимая для стандартного отклонения синоптической изменчивости среднеглобальной температуры σ_{T0} оценку

$\sigma_{T0} = 0,57$ К [Manabe, Hann, 1985], полученную по результатам численных экспериментов моделирования атмосферной изменчивости, найдем оценку $\beta_R \approx 5,2$. Если оценивать β_R по данным только локальных наблюдений, то при характерных значениях локальных стандартных отклонений синоптических флуктуаций $\sigma_{T0}^{(loc)} = 3 \div 5$ К [Oort, 1973] и принятом ранее $\sigma_{R0}^{(loc)} = 40$ Вт/м², оценка β_R составит: $\beta_R \approx \lambda_R \sigma_T \approx 4 \div 7$. Обе оценки согласуются между собой. При таком значении параметра β_R в данной модели взаимодействия с аномалиями ТПО может значительно увеличивать спектр флуктуаций температуры воздуха в области низких частот. Значительное увеличение интенсивности флуктуаций на низких частотах из-за взаимодействия с ΔT_w (для зонально осредненных метеопараметров) было обнаружено, например, в численных экспериментах на малокомпонентной модели климата [Dalfes, Thompson, 1985].

На рисунке 4.2.1 приведены нормированные на дисперсию спектры межгодовых флуктуаций температуры воздуха, рассчитанные по модели (4.2.8) при $\beta_R = 4$. Здесь же приведен спектр, полученный по упрощенной стохастической энергобалансовой модели раздела 2.2, в которой пренебрегается разницей температуры между атмосферой и океаном и единственной независимой переменной является некоторая эффективная температура поверхности T_S , нормированный спектр последней соответствует (4.2.8) при $\beta_R \rightarrow \infty$. Для сравнения приведена эмпирическая оценка нормированного спектра межгодовых флуктуаций осредненной по северному полушарию температуры воздуха у поверхности. Эмпирические оценки были получены по данным рядов инструментальных наблюдений [Jones et al., 1999]. Для периода 1855–2002 гг. данные опубликованы на сайте Университета Восточной Англии (www.cgu.uea.ac.uk). Выбор для сравнения температуры северного полушария связан с тем, что, по сравнению с южным, в этом массиве меньший вклад дают данные, которые фактически отражают изменения температуры воды у поверхности в океанских областях. Учитывая большую долю суши ($f_w = 0,4$), при построении теоретических спектров было выбрано значение C_Σ , которое соответствует $\tau_\Sigma = 2,5$ года.

Помимо эмпирической оценки спектра, полученной непараметрическим методом, на рисунке 4.2.1 приведена его оценка по модели авторегрессии второго порядка AR(2). Именно такому виду спектров соответствует примененная в данном разделе эквивалентная стохастическая модель.

Из сравнения кривых на рисунке видно, во-первых, что модель авторегрессии второго порядка удовлетворительно согласуется с непараметрической оценкой эмпирического спектра. Во-вторых, предложенная простая стохастическая модель (4.2.8) находится в удовлетворительном согласии с данными

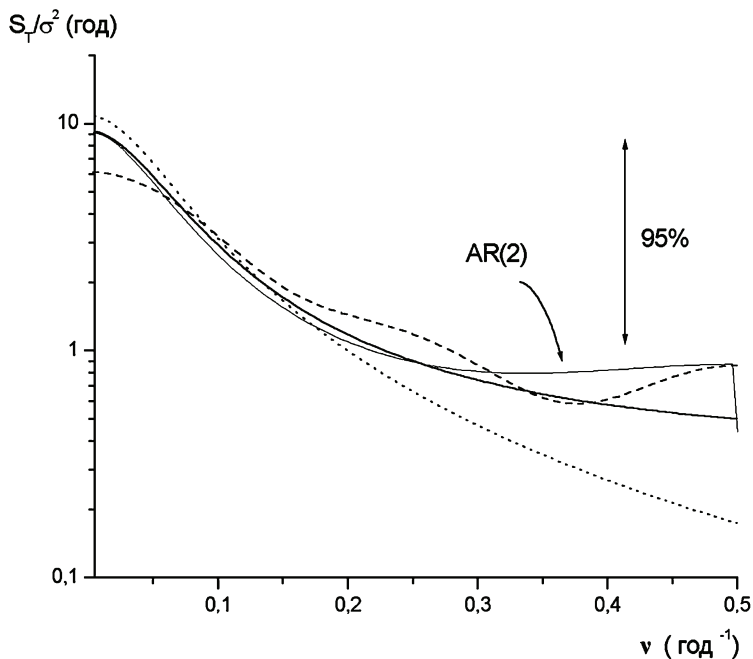


Рис. 4.2.1. Нормированный на дисперсию спектр межгодовых флуктуаций осредненной по северному полушарию температуры воздуха у поверхности

Жирная сплошная кривая – расчет по модели (4.2.8) при $\beta_R=4$, пунктирная – расчет для модели с единственной эффективной температурой поверхности ($\beta_R=\infty$). Непараметрическая оценка спектра по данным Университета Восточной Англии для периода инструментальных наблюдений (1856–2002 гг.) представлена штриховой линией. Тонкая сплошная линия соответствует авторегрессионной оценке спектра AR(2).

наблюдений за межгодовой изменчивостью температуры. Из рисунка 4.2.1 следует, что уже на периодах около 5 лет начинает проявляться значительное расхождение между моделью с отдельным описанием флуктуаций в атмосфере и океане и упрощенной моделью для флуктуаций некоторой эффективной температуры поверхности. В то же время это расхождение в области самых низких частот не столь значительно.

Полученные оценки изменения интенсивности низкочастотных флуктуаций средней глобальной или средней полушарной температуры воздуха при подключении взаимодействия флуктуаций в атмосфере и океане не учитывали возможную корреляцию синоптической изменчивости δT_a и δR_Σ . Схема численных экспериментов по выявлению роли взаимодействия быстрой и медленных подсистем в генерации низкочастотной изменчивости в быстрой в виде сравнения результатов интерактивного и неинтерактивного экспериментов на моделях общей циркуляции атмосферы и океана (МОЦАО) была приведена на рисунке 4.1.2. Например, рассмотрим случай, когда флуктуации неадиабатических притоков тепла из-за изменчивости тепловой радиации к ат-

мосфере в МОЦАО связываются только с отклонениями температуры воздуха таким образом, что для уходящей в космос тепловой радиации справедливо линейное соотношение: $\delta F_{\uparrow} = -B\delta T_a$. При этом другие изменчивости радиационных притоков не учитываются. Тогда, согласно (4.2.8) спектр флуктуаций осредненной по теплоизолированной с боковых границ области температуры воздуха в интерактивном эксперименте при $\omega \ll \tau_{\Sigma}^{-1}$ стремится к нулю. В данном случае взаимодействие с аномалиями температуры океана действует как *фильтр низкочастотной атмосферной изменчивости*. Это утверждение следует понимать в том смысле, что та часть синоптических флуктуаций уходящей тепловой радиации, которая пропорциональна малым флуктуациям температуры воздуха, при подключении взаимодействия с индуцированными этой компонентой изменчивости аномалиями ТПО стремится уменьшить низкочастотную изменчивость температуры атмосферы.

Подобная ситуация возможна, если δT_a и δR_{Σ} подвержены действию синоптических флуктуаций одного и того же фактора, например, облачности. Для учета возможной роли флуктуаций балла облачности n рассмотрим простейшую модель, полагая, что на частотах $\omega \ll \tau_a^{-1}$ спектральные компоненты синоптических флуктуаций радиационного баланса океана, атмосферы и системы в целом пропорциональны δn :

$$\begin{aligned} dR_{\Sigma 0}^{(\omega)} &= R_{\Sigma n} dn_0^{(\omega)}, & dR_{w0}^{(\omega)} &= R_{wn} dn_0^{(\omega)} \\ dR_{s0}^{(\omega)} &= R_{sn} dn_0^{(\omega)}, & dR_{a0}^{(\omega)} &= R_{an} dn_0^{(\omega)} \end{aligned}, \quad (4.2.12)$$

где $R_{\Sigma n}$, R_{wn} , R_{sn} и R_{an} – постоянные коэффициенты соответствующих балансов к изменениям балла облачности. Уравнение (4.2.5) для синоптических флуктуаций теплового баланса системы с учетом (4.2.7), (4.2.4) трансформируется в

$$\begin{aligned} dR_{\Sigma 0}^{(\omega)} - f_w dF_{w0}^{(\omega)} &= dR_{\Sigma 0}^{(\omega)} - f_w dR_{s0}^{(\omega)} - f_w \lambda_{aw} dT_{a0}^{(\omega)} - f_w dF_{aw0}^{(\omega)} \\ &= i\omega dH_{a0}^{(\omega)} \approx 0. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Пренебрегая $dF_{aw0}^{(\omega)}$ (не связанными с температурой флуктуациями контактного теплообмена) и с учетом (4.2.12) из (4.2.13), следует соотношение между $dT_{a0}^{(\omega)}$ и $dR_{\Sigma 0}^{(\omega)}$

$$dR_{\Sigma 0}(\omega) = dT_{a0}(\omega) \frac{f_w \lambda_{aw}}{R} \frac{1}{(1 - f_w \frac{wn}{R_{\Sigma n}})} = dT_{a0}(\omega) \lambda_R \beta_n. \quad (4.2.14)$$

Из (4.2.14) определяется безразмерный параметр β_n – аналог β_R из соотношения (4.2.8)

$$\beta_n = \frac{f_w \lambda_{aw}}{R} \frac{1}{(1 - f_w \frac{wn}{R_{\Sigma n}})} \lambda_R. \quad (4.2.15)$$

Согласно (4.2.5)–(4.2.7) разбиение спектра средней глобальной температуры на высокочастотную часть и часть, связанную аномалиями ТПО, после некоторых преобразований, приводится к виду (4.2.8) с заменой β_R на β_n .

Для обратного периода $\nu = \omega / 2\pi$:

$$S_T(\nu) = S_{T0}(\nu) \left[1 + \frac{1}{(2\pi f_{\Sigma} \tau)^2 + 1} \beta_n^2 \left(1 + \frac{2}{\beta_n} \right) \right]. \quad (4.2.16)$$

Преобразование (4.2.16) для частоты $\nu=0$, как отношение $S_T(\nu)/S_{T0}(\nu)$, задается формулой

$$S_T(0)/S_{T0}(0) = (1 + \beta_n)^2. \quad (4.2.17)$$

При $\beta_n = -1$ взаимодействие с аномалиями ТПО не увеличивает изменчивость средней глобальной температуры воздуха на низких частотах, но приближает ее к нулю. В этой взаимосвязи синоптических флуктуаций температуры и облачности взаимодействие с аномалиями ТПО действует как демпфирующее звено. Этот эффект демонстрирует рисунок 4.2.2. На рисунке показана зависимость спектра флуктуаций средней глобальной температуры с учетом взаимодействия атмосферы с аномалиями ТПО, нормированного на спектр ее синоптических флуктуаций, от параметра β_n , который зависит от синоптических корреляций, получаемых в эксперименте при отсутствии взаимодействия с аномалиями ТПО. Важным моментом стохастического моделирования такого типа экспериментов является регулирующая роль синоптических флуктуаций облачности.

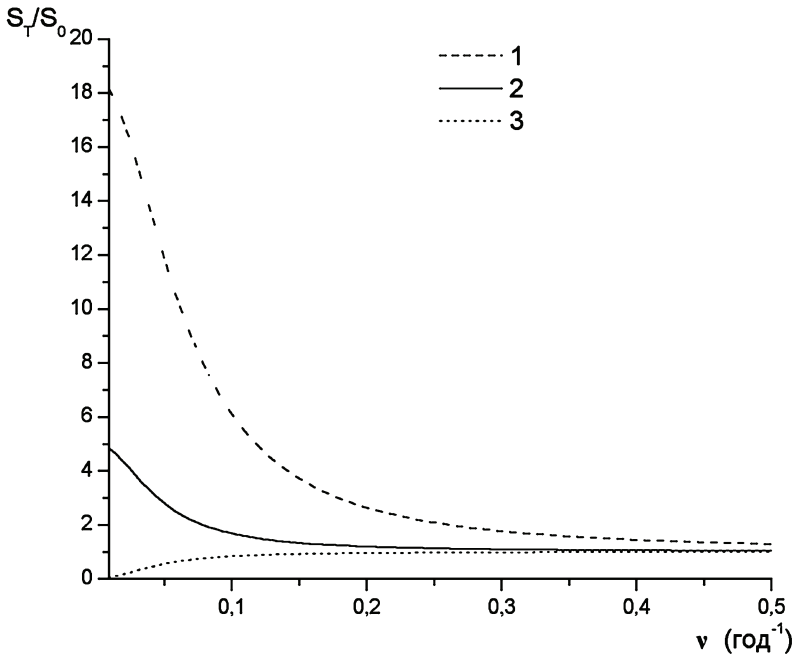


Рис. 4.2.2. Результаты сравнения спектров межгодовых флуктуаций средней глобальной температуры приземного воздуха от параметра облачно-радиационного взаимодействия β_n : кривая 1 соответствует значению $\beta_n = 5$, кривая 2 — $\beta_n = 1$, кривая 3 — $\beta_n = -1$.

4.3. Предсказуемость температуры воздуха в простой стохастической модели взаимодействия атмосферы и океана

Наглядной иллюстрацией возможностей развитого в этой главе метода эквивалентных стохастических систем служит его применение к задаче об определении предсказуемости температуры воздуха, решаемой в рамках линейных стохастических дифференциальных уравнений энергетического баланса. В разделе 2.2. упоминались первые теоретические работы в этом направлении [North, Cahalan, 1981]. Исходным в этих теоретических работах было уравнение для флуктуаций некоторой эффективной температуры поверхности ΔT_S , теплоизолированной с боковых границ области в форме (2.2.12) или (2.2.13). Интервал предсказуемости решений таких уравнений существенно зависит от выбора теплоемкости C_a . На самом деле в задаче существуют как минимум две температуры: верхнего слоя океана T_w и вертикального столба атмосферы T_a . Инерционность для первой переменной привязывается к теплоемкости ВКС C_w , для второй — к теплоемкости вертикального столба атмосферы

C_a . Для примера рассмотрим глобально или полушарно осредненную энергобалансовую модель предыдущего раздела. Для этой модели выпишем уравнения эквивалентной стохастической системы дифференциальных уравнений (4.1.33), (4.1.34), следуя работе [Зубарев, Демченко, 1992]

$$C_a \frac{d\Delta T_a}{dt} = -B\Delta T_a - f_w \lambda_{aw} (\Delta T_a - \Delta T_w) + F_a(t), \quad (4.3.1a)$$

$$C_w \frac{d\Delta T_w}{dt} = \lambda_{aw} (\Delta T_a - \Delta T_w) + F_w(t). \quad (4.3.1б)$$

Заметим, что система стохастических дифференциальных уравнений, аналогичная (4.3.1), впоследствии применялась для исследования особенностей эффектов взаимодействия атмосферы и океана на спектры флуктуаций и предсказуемость температур океана и атмосферы в средних широтах [Bretherton, Battisti, 2000]. Однако стохастическим воздействием $F_w(t)$ в этих работах пренебрегается. Как будет видно в дальнейшем, это может приводить к существенным погрешностям.

В уравнениях (4.3.1) есть малый параметр $\varepsilon = C_a / C_w \ll 1$. Из-за его наличия собственное время релаксации аномалий температуры атмосферы $\tau_a = C_a / \lambda_a$ ($\lambda_a = B + f_w \lambda_{aw}$) существенно меньше времени релаксации аномалий ТПО $\tau_w = C_w / \lambda_{aw}$. Тогда релаксация аномалий ΔT_a на временах $t \gg \tau_R = C/B$, согласно развитой в синергетике [Хакен, 1980] идее «приспособления» быстрых переменных (ΔT_a) к эволюции переменных медленных (ΔT_w) и трактуя первые как «slaving variables», происходит синхронно с последними и определяется их временами релаксации. Для иллюстрации этой идеи рассмотрим систему линейных стохастических дифференциальных уравнений общего вида, записав ее в виде

$$\varepsilon \frac{d\Delta X}{dt} = -\lambda_X (\Delta X - \langle X \rangle_Y \Delta Y) + f_X(t), \quad (4.3.2a)$$

$$\frac{d\Delta Y}{dt} = -\lambda_Y (\Delta Y - \langle Y \rangle_X \Delta X) + f_Y(t), \quad (4.3.2б)$$

$$\langle f_{X,Y}(t) f_{X,Y}(t') \rangle = 2D_{X,Y} \delta(t-t'). \quad (4.3.2в)$$

Здесь $X(t)$ – быстро флуктуирующая ($\varepsilon \ll 1$) переменная (как T_a), $Y(t)$ – медленная переменная (как T_w). Случайные источники $f_X(t)$ и $f_Y(t)$ для простоты далее считаем статистически независимыми. Система уравнений

(4.3.1) есть частный случай (4.3.2), если разделить уравнения на C_w и учесть это в определении случайных сил.

Адаптированное значение $\langle \Delta X | \Delta Y \rangle = \langle X \rangle_Y \Delta Y$ есть «квазисреднее», построенное по статистике $\Delta X(t)$ при заданном ΔY – аналог среднего, определенного по ансамблю экспериментов отклика атмосферы на фиксированные аномалии ТПО. Аналогичное соотношение можно записать для аналога эксперимента по определению отклика ТПО на заданное стационарное атмосферное воздействие: $\langle \Delta Y | X \rangle = \langle Y \rangle_X \Delta X$.

Решение задачи Коши для (4.3.2 а, б) без случайных сил для определения эволюции начальной аномалии $\{ \Delta X(0), \Delta Y(0) \}$, можно получить стандартными методами [Корн Г., Корн Т., 1974]. Можно показать, что на временах $t \gg t_X = O(\varepsilon t_Y)$ оно будет определяться соотношениями

$$\Delta Y(t) = \Delta Y(0) \exp(-t/t_Y), \quad \Delta X(t) = \langle X \rangle_Y \Delta Y(0) \exp(-t/t_Y), \quad (4.3.3)$$

где

$$t_Y^{-1} = \lambda_Y (1 - \langle X \rangle_Y \langle Y \rangle_X).$$

Соотношения (4.3.3) являются стандартным следствием синергетического подхода. Их можно получить из исходной системы (4.3.2 а,б), устремив ε к нулю, то есть определяя $\Delta X(t)$ из стационарной версии (4.3.2 а) и подставляя полученное соотношение в (4.3.2 б). Однако для определения статистической предсказуемости решения $\Delta X(t)$, как будет показано далее, такой подход может приводить к неверным результатам.

Стационарная плотность вероятностей решения (4.3.2) есть нормальное распределение $N(\Delta X, \Delta Y | \sigma_X^2, \sigma_Y^2, r_{XY})$ с дисперсиями σ_X^2 , σ_Y^2 и коэффициентом корреляции r_{XY} , которые можно определить стандартными методами [Свешников, 1968]. Также можно определить отдельно плотности распределения вероятностей для каждой из переменных. Зная эти функции, условную плотность вероятностей $\rho_{X|Y}(\Delta X | \Delta Y)$ можно найти по формуле Байеса [Корн Г., Корн Т., 1974]

$$\rho_{X|Y} = N(\Delta X | \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} \Delta Y, \sigma_X^2 (1 - r_{XY}^2)). \quad (4.3.4)$$

При $\varepsilon \ll 1$

$$\langle \Delta X; \Delta Y \rangle = \langle X \rangle_Y \Delta Y \left[D_Y + D_X \frac{\lambda_Y^2 \langle Y \rangle_X}{\lambda_X^2 \langle X \rangle_Y} \right] \left[(D_Y + D_X \frac{\lambda_Y^2 \langle Y \rangle_X^2}{\lambda_X^2}) \right]^{-1}. \quad (4.3.5)$$

Анализ формулы (4.3.5) дает ответ на вопрос: совпадает ли даже при $\varepsilon \ll 1$ «квазисреднее» $\langle \delta X \rangle = \langle X \rangle_Y \Delta Y$ (определяемое из усеченной системы – уравнения (4.3.2а)) с точным условным средним. В случае $D_X \ll D_Y$ из (4.3.5) следует, что условное среднее определяется выражением $\langle \Delta X | \Delta Y \rangle = \langle X \rangle_Y \Delta Y$ – т.е. совпадает с «квазисредним», полученным в ансамбле экспериментов по чувствительности ΔX (например T_a) к стационарным аномалиям ΔY (например ТПО).

Парадоксальный результат получается в противоположном предельном случае $D_Y \ll D_X$, когда $\langle \Delta X | \Delta Y \rangle = \Delta Y / \langle Y | \rangle_X$ – т.е. условное среднее удовлетворяет стационарному варианту (4.3.2 б)! Тем самым здесь показано, что среднестатистическая «приспособляемость» быстрых переменных к медленным, в качестве меры которой выбрано условное математическое ожидание $\langle \Delta X | \Delta Y \rangle$, существенно зависит от того, как распределены случайные источники между X - и Y -подсистемами.

Перейдем теперь к анализу среднестатистической предсказуемости решения (4.3.1). Случайные источники $F_w(t)$ и $F_a(t)$ далее для простоты предполагаются не коррелированными между собой. Для вошедших в (4.3.1) параметров принимаются те же значения, что и в предыдущем разделе. Система (4.3.1) имеет набор характерных времен для различных процессов: $\tau_{aR} = C_a / B = 60$ сут, $\tau_\Sigma = C_w f_w / B = 3.5$ лет, $\tau_a = C_a / (B + f_w \lambda_{aw}) = 3.5$ сут, $\tau_w = C_w / \lambda_{aw} = 82$ сут. Решение задачи Коши для (4.3.1) $\Delta T_a(t)$ с начальными условиями $\Delta T_a(0)$, $\Delta T_w(0)$ в явном виде содержит детерминированную и случайную части («сигнал» и «шум»):

$$\Delta T_a(t) = \Delta T_a'(t) + \delta T_a(t), \quad (4.3.6)$$

$$\delta T_a(t) = \Delta T_a(0)A(t) + \Delta T_w(0)B(t),$$

$$\Delta T_a'(t) = \frac{1}{C_a} \int_0^t dt_1 F_a(t_1) A(t-t_1) + \frac{1}{C_w} \int_0^t dt_1 F_w(t_1) B(t-t_1).$$

Функции отклика $A(t)$ и $B(t)$ есть суммы экспонент

$$A(t) = \frac{\lambda_1 - \tau_w^{-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_2 - \tau_w^{-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}, \quad (4.3.7)$$

$$B(t) = \frac{\tau_a^{-1} - \tau_{aR}^{-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right),$$

где λ_1 и λ_2 – корни уравнения

$$\lambda^2 - \lambda(\tau_a^{-1} + \tau_w^{-1}) + \tau_w^{-1} \tau_a^{-1} = 0. \quad (4.3.8)$$

При выбранных значениях параметров $\lambda_1 \approx \tau_a^{-1} \gg \lambda_2 \approx \tau_\Sigma^{-1}$. Входящая в (4.3.7) функция $A(t)$ описывает спад начальной аномалии $\Delta T_a(0)$ с характерным временем около 3 сут, $B(t)$ на малых временах описывает приспособление $\Delta T_a(t)$ к $\Delta T_w(t)$ с тем же характерным временем, а на больших временах – адаптированную к эволюции ΔT_w эволюцию ΔT_a .

Как и в разделе 2.4, определим интервал времени среднестатистической предсказуемости [Зубарев, Демченко, 1992] как время t_* , за которое дисперсия флуктуаций решения (4.3.6) $\delta T_a(t)$, связанная с неопределенностью задания начальных условий $\Delta T_{a,w}(0)$, сравнивается с дисперсией флуктуаций, вызванной стохастическими источниками $F_{aw}(t)$ ($\Delta T_a'(t)$),

$$\langle \delta T_a^2(t_*) \rangle = \langle \Delta T_a'(t_*) \rangle.$$

Слева осреднение ведется по ансамблю начальных состояний со стационарной плотностью вероятностей $\rho_{a,w}^{st}$: $\langle \delta T_a^2(t_*) \rangle = [\Delta T_a(0)A(t) + \Delta T_w(0)B(t)]^2$. Дисперсия «шумов» $\Delta T_a(t)$ в начальный момент времени равна нулю и при $t \rightarrow \infty$ стремится к стационарному значению σ_{ast}^2 , определяемому $\rho_{a,w}^{st}$. В качестве меры среднестатистической предсказуемости $\Delta T_a(t)$ в разделе 2.4 введена величина $J(t)$, задаваемая формулой (2.4.3) [Зубарев, Демченко, 1992], равенство которой 0 происходит при $t=t_*$ – интервалу предсказуемости.

Введенная здесь характеристика предсказуемости безразмерна и не зависит от абсолютной величины интенсивности случайных источников в (2.4.2)

D_a и D_w ($\langle F_{a,w}(t)F_{a,w}(t') \rangle = 2D_{a,w}\delta(t-t')$). Однако время предсказуемости t_* существенно зависит от того, как распределена интенсивность флуктуаций источников тепла между подсистемами. Зафиксировав принятые ранее оценки $C_{a,w}$, λ_{aw} , B и f_w , можно построить зависимость $J_a(t)$ для различных соотношений интенсивности флуктуаций случайных источников в атмосфере и океане, введя безразмерную меру Π :

$$\Pi = \frac{D_a}{D_a + D_w}. \quad (4.3.9)$$

В табл. 4.3.1 представлены значения t_* как функции Π . Из данных таблицы следует, что при $\Pi=1$, когда $D_w=0$ (что не исключает флуктуаций $\Delta T_w(t)$ из-за взаимодействия с атмосферой через контактный теплообмен), интервал предсказуемости близок к 3 сут, т.е. к $\tau_a = C_a / (B + f_w \lambda_{aw}) = 3.7$ сут. В другом предельном случае $\Pi=0$ (т.е. когда флуктуации источников тепла целиком сосредоточены в океане) интервал предсказуемости составляет около 1.5 лет. Все остальные случаи ($1 > \Pi > 0$) дают промежуточные значения t_* .

Изменение отношения интенсивностей случайных источников в быстрой и медленной подсистемах от больших величин к малым качественно меняет статистику их взаимодействия [Зубарев, Демченко, 1992].

В заключение приведем некоторые модельные оценки предсказуемости среднеглобальной T_a . Поскольку здесь пренебрегается долгопериодными динамическими процессами (в том числе нелинейными), а короткопериодные учли в виде добавочных шумов, приводимые ниже оценки следует считать оценками «термодинамической предсказуемости». Для статистических моментов решения (4.3.1) при выбранных значениях коэффициентов системы выполняются неравенства $B/\lambda_{aw} \ll 1$ и $C_a/C_w \ll 1$ (хотя при этом $(B/\lambda_{aw})(C_a/C_w) \approx 1.3$) и справедлива приближенная формула

$$r_{aw}^2 \approx \frac{\sigma_w}{\sigma_a} \approx \sqrt{\frac{\Pi + (1-\Pi)f_w^2}{(1-\Pi)f_w^2 + \Pi(1 + C_w \lambda_{aw}^{-1} C_a^{-1})}}. \quad (4.3.10)$$

Таблица 4.3.1. Зависимость интервала предсказуемости среднеглобальной температуры в модели (4.3.1) от параметра Π (4.3.9)

Π	0,0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1
t_* , сут	550	370	150	13	5,3	4,0	3,7

Для оценки Π (и интервала предсказуемости) воспользуемся данными о межгодовых флуктуациях среднеглобальных T_a и T_w за период инструментальных наблюдений (данные были любезно предоставлены Паркером). Для всего периода коэффициент корреляции между ΔT_a и ΔT_w примерно равен 0.75. Если же использовать только период, когда данные были максимально однородны (с 1900 г.), то $r_{aw} = 0.85$. При таких оценках Π меняется от 0.2 до 0.4.

При средней оценке $\Pi=0.3$, согласно данным таблицы 4.3.1 интервал предсказуемости среднеглобальной температуры воздуха $t_* = 5$ мес. Вместе с тем для локальных флуктуаций интервал предсказуемости должен быть меньше. И действительно, если воспользоваться оценкой σ_a^2 / σ_w^2 , полученной по данным судна погоды E [Kraus, Morrison, 1966], то получим оценку $t_* = 10$ сут. Однако оценками интервала предсказуемости по рассмотренной здесь модели для описания локальных флуктуаций следует пользоваться осторожно ввиду важной роли локальных нелинейных процессов в атмосфере и не учета горизонтальной адвекции тепла.

4.4. Стохастическое моделирование флуктуаций влажности атмосферы при взаимодействии с почвенной влагой

Влагосодержание почвы из-за своей инерционности, как и теплосодержание верхних слоев океана, интегрирует воздействие быстропротекающих атмосферных процессов. Расчет спектров броуновского движения влагозапаса верхнего слоя почвы W был дан в предыдущих главах. В то же время аномалии влагосодержания почвы модулируют испарение и потоки тепла (явного и скрытого) на границе атмосферы и поверхности суши и могут приводить к значительным эффектам, важным для развития низкочастотных атмосферных возмущений. Во многом это может быть связано с цепью взаимодействий «влажность почвы – испарение – влажность атмосферы – осадки – влажность почвы – испарение». Численные эксперименты по воспроизведению гидрологического баланса водосбора крупных речных бассейнов показали, что коллективные эффекты взаимодействия влаги почвы и атмосферы могут приводить как к засушливым режимам, так и к наводнениям [Entekhabi et al., 1996]. Для выяснения роли взаимодействия почвенной влаги с атмосферой в генерации атмосферной изменчивости на временных масштабах, сравнимых со временем релаксации аномалий почвенной влаги τ_W (от месяца до сезона) необходимо проведение численных экспериментов, аналогичных экспериментам по анализу взаимосогласованной эволюции аномалий температуры поверхности океана и аномалий общей циркуляции атмосферы.

Первые численные эксперименты такого рода [Delwoth., Manabe, 1989] по выявлению роли влажности почвы в изменчивости атмосферы путем сравнения результатов интерактивного и неинтерактивного экспериментов (см. схе-

му рис. 4.1.1) были проведены на модели общей циркуляции атмосферы и океана Лаборатории геофизической гидродинамики (г. Принстон, США). В этих экспериментах влажность почвы рассчитывался по интегральной модели эволюции влагозапаса – уравнению баланса влаги верхнего слоя почвы (3.5.1) с параметризацией испарения E по методу Будыко и стока R – по «модели ведра», использованной в разделе 2.3 для расчета поведения спектров влагозапаса в режиме избыточного увлажнения. Численный эксперимент разбивался на два этапа. На первом этапе (интерактивный эксперимент) интегрировалась полная система уравнений, аппроксимирующая взаимодействующие атмосферу и влагозапас почвы W . Расчет проводился на 50 лет – срок, достаточный для надежного определения первых и вторых статистических моментов – при заданном годовом ходе температуры поверхности океана. На втором этапе полученные в интерактивном эксперименте средние значения влагозапаса в каждой ячейке модели (учитывая их годовой ход) принимались в качестве заданных внешних параметров и на 25 лет проводилось интегрирование только атмосферной модели. На рис. 4.4.1 приведены данные, которые иллюстрируют коллективный эффект интенсификации атмосферной изменчивости из-за взаимодействия атмосферы и почвенной влаги в процессе согласованной коэволюции (интерактивный режим) по сравнению со случаем, когда влажность почвы фиксирована (неинтерактивный режим).

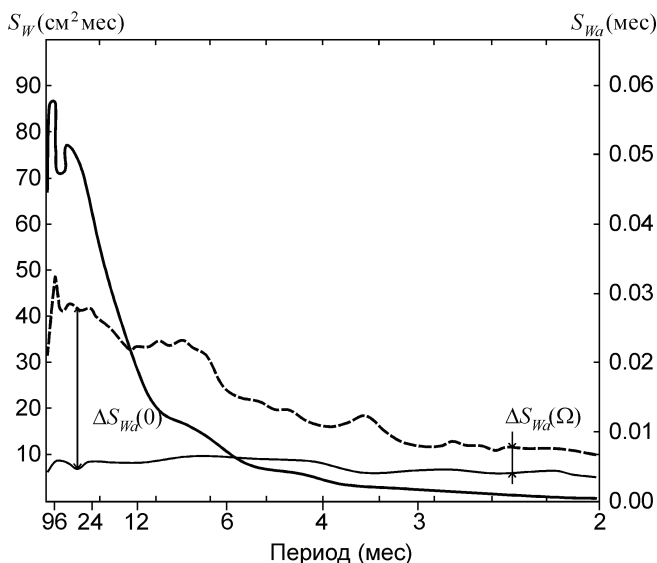


Рис. 4.4.1. Спектры флуктуаций относительной влажности приповерхностного воздуха S_{Wa} по результатам модели общей циркуляции [Delworth, Manabe, 1989]

Пунктирная линия соответствует неинтерактивному эксперименту, сплошная – интерактивному. Для сравнения сплошной жирной линией нанесен спектр влагозапаса почвы S_W в интерактивном эксперименте. Спектры были пространственно осреднены по территории Сев. Америки в широтном поясе 36–54°N. На рисунке нанесены стрелками разности спектров относительной влажности вблизи нулевой частоты между экспериментами $\Delta S_{Wa}(0)$ и разность величин спектров в промежуточной области частот – спектрального плато $\Delta S_{Wa}(\Omega)$.

Приведенный на рис. 4.4.1 спектр влагозапаса близок к спектру Орнштейна–Уленбека $S_W(\nu) \sim [(2\pi\nu)^2 + \lambda_W^2]^{-1}$, где $\nu = \omega/2\pi$ – линейная частота. Время корреляции $\tau_W = 1/\lambda_W$ для данных рис. 4.4.1 составляет около двух месяцев. Напомним, что время корреляции соответствует обратной линейной частоте и на рис. 4.4.1 – периоду уменьшения спектра вдвое, деленному на 2π . Основная компонента изменчивости атмосферного гидрологического цикла над сушей связана с флуктуациями атмосферной циркуляции, приводящим к флуктуациям осадков. При этом во многом это связано с флуктуациями адвективных осадков, которые присутствуют и в неинтерактивном эксперименте. Однако как показали приведенные результаты численных экспериментов, на низких частотах взаимодействие с индуцированными этими осадками флуктуаций влагозапаса могут приводить к существенным изменениям спектра атмосферной влажности. Существенное увеличение спектра атмосферной влажности на частотах $\nu < \lambda_W/2\pi$ в интерактивном эксперименте связано с откликом на флуктуации влагозапаса почвы, модулирующего испарение с поверхности. Поведение спектров на рис. 4.4.1 в самой низкочастотной области допускает интерпретацию в рамках формализма эквивалентных стохастических систем, причем в линейной версии обобщенного разбиения Ланжевена [Демченко, 1989] эволюции быстрой подсистемы. В этой интерпретации инерционный влагозапас интегрирует короткопериодные атмосферные воздействия, подобно броуновской частице. На временах $\tau > \tau_W$ флуктуации влагозапаса становятся существенными и вызывают дополнительные низкочастотные флуктуации в атмосфере.

Важной особенностью приведенных на рисунке 4.4.1 спектров является увеличение спектральной мощности флуктуаций атмосферной влажности на рис. 4.4.1 для интерактивного эксперимента в промежуточной области частот – области спектрального плато $S(\Omega: \lambda_W \ll \omega \ll \lambda_a) \approx \text{const}$. В линейной версии стохастических моделей в этой области частот результаты обоих экспериментов должны совпадать. Этого не отмечается по результатам экспериментов на модели общей циркуляции, приведенных на рисунке 4.4.1. Аппарат стохастических дифференциальных уравнений оказывается удобным инструментом как для исследования эффектов влияния синоптических корреляций на спектры флуктуаций в низкочастотной области, так и для выявления роли нелинейных механизмов в промежуточной области частот [Демченко, 1997].

Для анализа роли влажности почвы в генерации низкочастотной изменчивости атмосферной влажности используем упрощенную балансовую модель, которая позволяет воспроизвести и проинтерпретировать некоторые результаты по сравнению интерактивного и неинтерактивного экспериментов, полученные на модели общей циркуляции [Delwoth, Manabe, 1988, 1989]. Для этого рассмотрим уравнения баланса влаги в вертикальной колонке, проходящей через деятельный слой почвы и атмосферу. В качестве меры влажно-

сти почвы примем влагозапас W , для которого справедливо уравнение баланса (3.5.1) или (3.5.3). В качестве меры влажности примем суммарное влагосодержание атмосферного столба W_a , которое будем измерять в тех же единицах, что и влагозапас. Запишем уравнения баланса влаги в рассматриваемых столбах

$$\frac{dW}{dt} = -E + P - R, \quad (4.4.1a)$$

$$\frac{dW_a}{dt} = E - P + D_h. \quad (4.4.1б)$$

В (4.4.1б) D_h – приток влаги к столбу атмосферы за счет горизонтальной адвекции.

Введем, как и ранее, операцию $\langle X|Y \rangle$ – осреднение по ансамблю реализаций движений быстрой X -подсистемы (атмосферы) при фиксированных значениях медленных Y -переменных (в нашем случае – влагозапаса почвы), то есть по ансамблю реализаций неинтерактивного эксперимента. Среднее значения для любой функции неинтерактивного эксперимента связано с соответствующим ему интерактивного соотношением

$$\langle F \rangle^{(n)} = \langle F | \langle W \rangle^{(i)} \rangle. \quad (4.4.2)$$

В (4.4.2) и далее индекс n относится к неинтерактивному эксперименту, индекс i – к интерактивному.

При параметризации испарения по формуле Будыко с учетом флуктуаций синоптической изменчивости потенциальной испаряемости

$$E = \langle E | W(t) \rangle + \Delta E(t) = E_0 \frac{W(t)}{W_0} + \Delta E(t) \quad (4.4.3)$$

и для областей, далеких от насыщения влагой в почве, уравнение эволюции влагозапаса в пренебрежении стоком приводится к виду

$$\frac{dW}{dt} = -E_0 \frac{W}{W_0} + P - \Delta E = -\lambda_E W + P - \Delta E. \quad (4.4.4)$$

Строго говоря, в величине потенциальной испаряемости в (4.4.4) следует учитывать и возможные флуктуации, связанные с низкочастотными флуктуациями температуры, отмечаемые по данным интерактивного эксперимента. Однако здесь мы этого эффекта рассматривать не будем.

Осредненную по быстрым движениям адвекцию влаги свяжем с разностью между W_a и некоторой фоновой влажностью W_f , синоптические флуктуации горизонтальной адвекции влаги зададим случайным погодным возбуж-

дением $f^{(D)}$. При такой параметризации горизонтальная адвекция влаги в (4.4.1б) равна

$$D_h = -\lambda_D(W_a - W_f) + f^{(D)}. \quad (4.4.5)$$

Поскольку влагообмен между почвой и атмосферой подвержен воздействию короткопериодных флуктуаций локальных осадков и испарения, в систему уравнений баланса влаги (4.4.1) необходимо ввести локальные флуктуации влагообмена, как случайный источник $f^{(loc)}(t)$, который не связан с детерминированной составляющей баланса и с адвективным притоком влаги к атмосферному столбу. Термин «детерминированный» в данном случае означает условное математическое ожидание величины осадков и испарения при фиксированных значениях W и W_a , которое для осадков P будем полагать зависящим от степени насыщения атмосферного столба влагой и скорости горизонтальной адвекции D_h . В принятых предположениях уравнения баланса влаги почвы и атмосферы (4.4.1) трансформируются в систему

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= -\lambda_E W + P + f^{(loc)}, \\ \frac{dW_a}{dt} &= \lambda_E W - P - \lambda_D(W_a - W_f) + f^{(D)} - f^{(loc)}, \\ P &= P(W_a, E + D_h). \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Последнее уравнение содержит в качестве предельного случая простую параметризацию адвективных осадков, аналогичную рассмотренной ранее схеме «модели ведра» – выпадения избыточного притока влаги в осадки при достижении влажностью некоторого критического значения [Демченко, 1997].

Пренебрежение температурными эффектами и упрощенная параметризация адвекции делает систему (4.4.6) грубой, однако она учитывает действие влагозапаса почвы на локальный баланс влаги в атмосфере, не противоречит законам сохранения и содержит случайное возбуждение. Поэтому данную систему стохастических дифференциальных уравнений можно считать минимальной эквивалентной стохастической системой для исследования эффектов взаимодействия флуктуаций почвенной и атмосферной влаги.

Увеличение спектральной мощности флуктуаций атмосферной влажности при учете ее взаимодействия с влагой почвы в промежуточной области частот ($\tau_a^{-1} \ll \omega \ll \tau_E^{-1}$), отмеченное по результатам моделирования на модели общей циркуляции (см. рис. 4.4.1), не может найти объяснения в рамках линейных стохастических моделей. В то же время сравнение приведенных на рисунке спектров показывает, что около половины дисперсии изменчивости

приходится именно на этот частотный диапазон. Проведенные методами стохастических дифференциальных уравнений исследования [Демченко, 1997] показали, что данный эффект связан с нелинейными взаимодействиями между первыми и вторыми статистическими моментами флуктуаций влаги. Один из нелинейных механизмов трансформации атмосферной влаги связан с ограниченной способностью к накоплению влаги в столбе атмосферы. Поскольку в упрощенной модели (4.4.6) рассматривается интегральное влагосодержание атмосферного столба W_a , в дальнейшем принимается существование некоторого критического насыщающего значения W_{ac} . Процесс выпадения осадков параметризуется аналогично процессу образования стока с помощью «модели ведра»:

$$P = (E + D_h)H(W_a - W_{ac})H(E + D_h), \quad (4.4.7)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда.

Естественно предположить, что влажность атмосферы при прочих равных условиях с ростом испарения увеличивается, так что $\partial \langle W_a | W \rangle / \partial W \geq 0$. Однако, если она не может превысить критического значения (при котором выпадают осадки), эта производная должна убывать, так что $\partial^2 \langle W_a | W \rangle / \partial^2 W \leq 0$. Так как характерное время атмосферных флуктуаций τ_a составляет несколько суток, в то время как время реакции влагозапаса почвы τ_W – несколько месяцев, в нулевом приближении по малому параметру τ_a / τ_W среднее значение любой величины F можно выразить через $\langle F | W \rangle$ [Демченко, 1989]:

$$\langle F \rangle^{(i)} = \int \rho_W(W) \langle F | W \rangle dW = \int \rho_W(W) \langle F \rangle^{(n)}(W) dW, \quad (4.4.8)$$

где $\rho_W(W)$ – плотность распределения вероятностей медленной переменной W .

Подстановка в (4.4.2) разложения произвольной $\langle F | W \rangle$ в ряд относительно $W^{(i)}$ с точностью до членов второго порядка малости, как можно показать, приводит к важному соотношению [Демченко, 1997]

$$\langle F \rangle^{(i)} = \langle F | \langle W \rangle^{(i)} \rangle + \frac{1}{2} \langle (W - \langle W \rangle^{(i)})^2 \rangle \frac{\partial^2 \langle F | W \rangle}{\partial^2 W} \Big|_{W = \langle W \rangle^{(i)}}. \quad (4.4.9)$$

При выводе (4.4.9) предполагается, что в окрестности $W = \langle W \rangle^{(i)}$ изменения $\langle F | W \rangle$ происходят более плавно, чем изменения ρ_W . Поскольку, как уже было отмечено, при наличии критического значения атмосферной влажности $\partial^2 \langle W_a | W \rangle / \partial^2 W \leq 0$, из (4.4.9) следует, что

$$\langle W_a \rangle^{(n)} \geq \langle W_a \rangle^{(i)}. \quad (4.4.10)$$

Аналитическое исследование «модели ведра», проведенное ранее в применении к моделированию влагозапаса почвы, показали, что его изменчивость при приближении к насыщению определяется разностью среднего и критического значений. А именно: чем ближе среднее значение к критическому, тем меньше дисперсия и время корреляции флуктуаций. Согласно (4.4.10) для «модели ведра» среднее значение атмосферного влагозапаса увеличивается при переходе от интерактивного к неинтерактивному эксперименту. Поэтому в качестве рабочей гипотезы принимается, что изменение спектрального плато $S(\Omega)$ связано со сдвигом средних.

Для доказательства этого эффекта была проведена серия расчетов по модели (4.4.6) с параметризацией осадков по «модели ведра» при $f^{(loc)}=0$. Расчеты проведены для безразмерных переменных модели (4.4.6), (4.4.7) с помощью введения безразмерных времени $\tau = \lambda_D t$ и влагозапаса $w = W / W_{ac}$. Поскольку временной масштаб атмосферы характеризует горизонтальную адвекцию с синоптическим временем корреляции – несколько суток, то и в дальнейшем будем полагать, что безразмерное время соответствует нескольким суткам. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\tau} &= -\varepsilon w + p, \\ \frac{dw_a}{d\tau} &= \varepsilon w - p - (w_a - w_f) + \phi_D, \\ p &= (\varepsilon w + d_h)H(\varepsilon w + d_h)H(w_a - 1), \quad d_h = -w_a + w_f. \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

В (4.4.11) $\varepsilon = \lambda_a / \lambda_D$ – малый параметр, а ϕ_D – безразмерные случайные источники. Расчеты по нелинейной стохастической модели (4.4.11) проводились методом Монте-Карло при различных значениях фоновой влажности w_f , выбранной в качестве управляющего параметра. Они подтвердили сдвиг средних значений (4.4.10). Также подтвердился и эффект увеличения спектра в промежуточной области частот в интерактивном по сравнению с неинтерактивным экспериментом. При удалении средней влажности от насыщающей сдвиг средних исчезает одновременно с исчезновением сдвига спектрального плато $S(\Omega)$. Как показали расчеты, величина $S(\Omega)$ определяется разностью критической и средней влажности. Пример расчета спектров приведен на рисунке 4.4.2, который следует сравнить с рисунком 4.4.1, полученным на модели климата с большим числом степеней свободы. Кривая 1 соответствует расчету спектра флуктуаций w_a в интерактивном эксперименте по

(4.4.11) при $\varepsilon=0,05$ для двух значений фоновой влажности: $w_f=0,85$ (а) и $w_f=0,9$ (б) (кривая 2 – неинтерактивный эксперимент). Выбранное значение $\varepsilon=0,05$ при $\tau_a \approx 3$ суток соответствует характерному времени влагозапаса почвы 2 месяца.

Из сравнения кривых на рисунке 4.4.2 видно, что подключение интерактивного влагозапаса почвы может увеличивать спектр флуктуаций атмосферной влаги в несколько раз (помимо увеличения спектра вблизи нулевой частоты). Такое увеличение отмечается и по данным рисунка 4.4.1. В неинтерактивном эксперименте произошел сдвиг средней влажности атмосферы до $w_a=0,91$ (для данных рисунка 4.4.2, а) и $w_a=0,95$ (б) (для данных рисунка 4.4.2, б). Спектр реализации интерактивных экспериментов с такими же значениями фоновой влажности (обозначенной $w_f^{(m)}$) приведен на рисунке 4.4.2 (кривая 3). Как видно из данных рисунка, плато $S(\Omega)$ на кривой 3 практически совпадает с кривой 2, соответствующей неинтерактивному эксперименту с тем же значением фоновой влажности атмосферы, хотя значения спектров вблизи нулевой частоты отличаются.

Это соответствие $S(\Omega)$ средним значениям было проверено в многочисленных расчетах, которые подтвердили свойство преобразований спектров. А именно

$$S_1^{(n)}(\Omega) = S_2^{(i)}(\Omega) \text{ при } \langle W_a^{(i)} \rangle_2 = \langle W_a^{(n)} \rangle_1, \quad (4.4.12)$$

т.е. при переходе к от интерактивного к неинтерактивному эксперименту происходит сдвиг величины спектрального плато соответствующий сдвигу среднего влагозапаса атмосферы, однако значение $S(\Omega)$ в неинтерактивном эксперименте совпадает с таковым для интерактивного, проведенного при таком значении фоновой влажности (управляющего параметра), при котором среднее значение для нового интерактивного эксперимента совпадает со средним неинтерактивного в первом варианте экспериментов.

Роль нелинейности в других моделях осадкообразования (помимо «модели ведра») может приводить к иному знаку сдвига средних значений атмосферных переменных. Например, при параметризации адаптированной к медленной эволюции влагозапаса почвы составляющей осадков $P=P(W_a)$ из (4.4.6) следует, что

$$\frac{d \langle W_a | E \rangle}{dE} = \frac{1}{\frac{dP}{dW_a} + \lambda_D}, \quad (4.4.13)$$

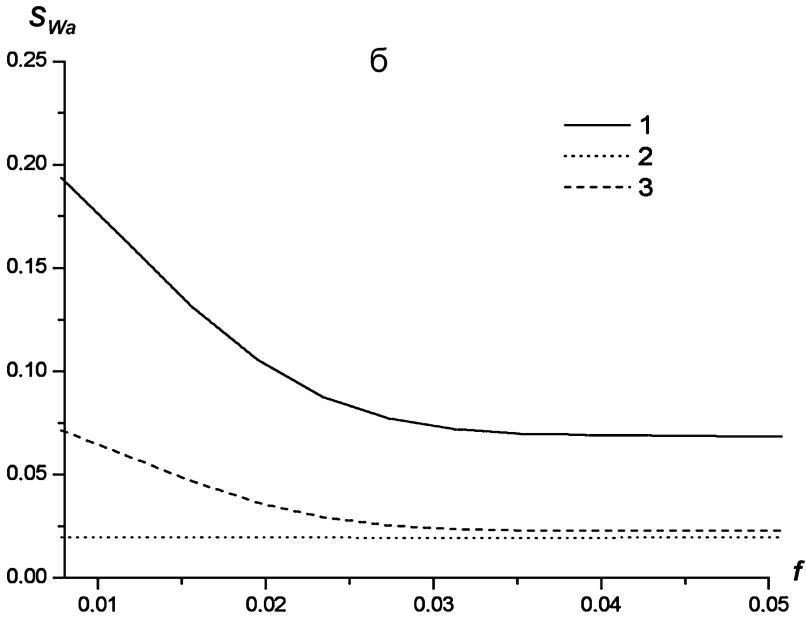
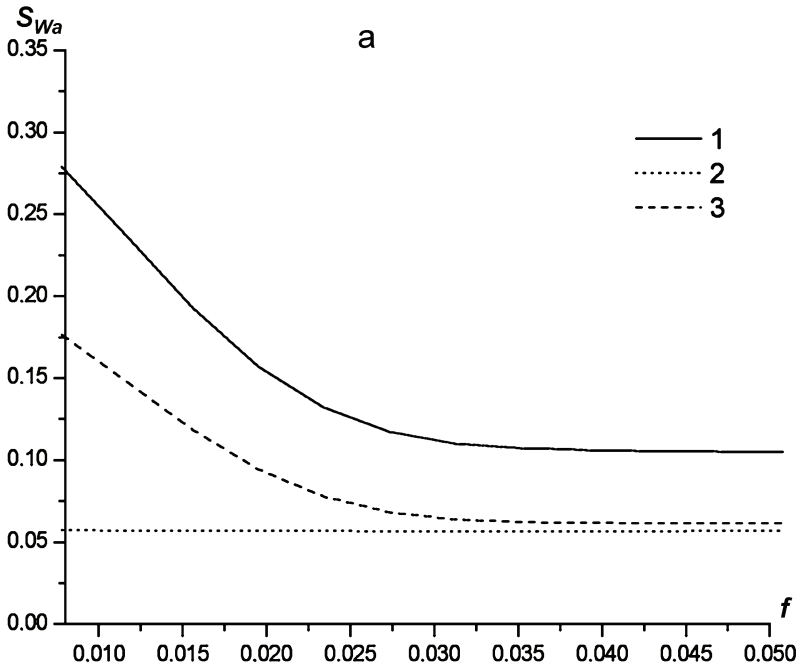


Рис. 4.4.2. Безразмерные спектры флуктуаций влагозапаса атмосферы для «модели ведра» в интерактивном (кривая 1) и неинтерактивном (кривая 2) режимах для $w_f=0,85$ (а) и $w_f=0,9$ (б). Кривая 3 – расчет для интерактивного режима при

$$w_f^{(m)} = \langle w_a \rangle^{(n)} (W_f).$$

поэтому вторая производная, важная для расчета сдвига средних согласно (4.4.9), противоположна по знаку второй производной осадков по влажности атмосферы. Напомним, что речь идет об условных средних с фильтрацией короткопериодной изменчивости. Так что в случае, когда вторая производная $P''(W_a)$ отрицательна, сдвиг средних может быть и противоположен по знаку сдвигу средних в «модели ведра».

В заключение приведем некоторые численные оценки рассмотренных эффектов. Прежде всего отметим, что относительное увеличение спектров флуктуаций атмосферной влажности из-за взаимодействия с флуктуациями влагозапаса почвы в промежуточной области частот совпадает для построенной здесь модели и для трехмерной гидродинамической модели климата [Delworth, Manabe, 1989]. Учитывая, что 1 месяц соответствует приблизительно $\tau=10$, для реалистического выбора параметров модели можно построить размерные спектры межмесячных флуктуаций относительной влажности атмосферы. По данным реанализа NCEP/NCAR [Kalnay et al., 1996] для грубой оценки условий над сушей Северного полушария можно принять, что в средних широтах $w_a=1$ приблизительно соответствует $W_{ac}=1$ см и определять из (4.4.11) абсолютные значения спектра флуктуаций влагозапаса почвы. Результаты такого расчета приведены на рисунке 4.4.3 для $\varepsilon=0,05$ и $w_f=0,85$.

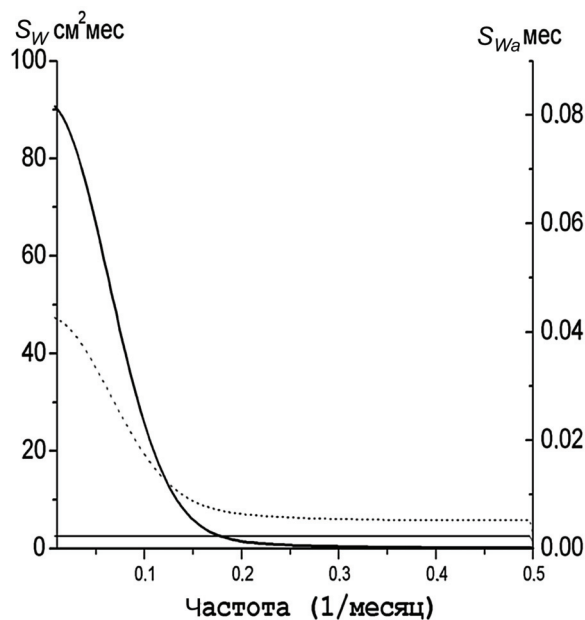


Рис. 4.4.3. Спектры флуктуаций относительной влажности приповерхностного воздуха по результатам стохастической модели (4.4.11)

Пунктирная линия соответствует неинтерактивному эксперименту, сплошная – интерактивному. Для сравнения сплошной жирной линией нанесен полученный по стохастической модели спектр влагозапаса почвы

Сравнение рисунков 4.4.1 и 4.4.3 показывает на хорошее соответствие данных гидродинамической модели климата и построенной стохастической модели взаимодействия. В обеих моделях спектр флуктуаций относительной влажности в промежуточной облачности частот в интерактивном эксперименте по сравнению с неинтерактивным увеличивается приблизительно в 2 раза. На низких частотах увеличение спектра относительной влажности атмосферы в интерактивном эксперименте в стохастической модели (более, чем в 10 раз) превышает таковое для гидродинамической модели (приблизительно в 5 раз).

В рассмотренной простой эквивалентной стохастической системе не учитываются температурные факторы. Наличие таких факторов не позволяет напрямую сравнивать результаты для относительной влажности на рисунках 4.4.1 и 4.4.3. Однако наличие отмеченного эффекта увеличения спектральной плотности в интерактивном эксперименте по данным двух рисунков указывает на новые возможности расчета спектральных плотностей по нелинейным эквивалентным стохастическим системам.

Для объяснения увеличения спектров вблизи нулевой частоты достаточно и линейной модели. Такая линейная модель с параметризацией аномалий осадков по формуле $\Delta P = -\lambda_P \Delta W_a$ была рассмотрена в [Демченко, 1997].

Было показано, что при реалистическом выборе климатических параметров коэффициенты обратной связи λ_P и λ_D имеют один порядок, соответствующий времени релаксации несколько суток и спектр интерактивного эксперимента увеличивается приблизительно в 4 раза вблизи нулевой частоты. Коэффициент корреляции среднемесячных значений аномалий атмосферной влажности со сдвигом в 1 месяц по расчетам на стохастической модели составляет около 0,4, что согласуется с данными гидродинамической модели и наблюдениями на территории США [Delworth, Manabe, 1989].

ЛИТЕРАТУРА

Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979. 653 с.

Агаян Г.М., Голицын Г.С., Мохов И.И. Зависимость потока уходящей радиации от приземной температуры по глобальным данным // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21, № 6. С. 637–661.

Адем Х. О физических основах численного прогноза среднемесячных и среднесезонных температур с системе тропосфера–океан–материк // Теория климата. Л.: Гидрометеиздат. 1967. С. 258–292.

Анищенко В.С., Нейман А.Б., Мосс Ф., Шиманский-Гайер Л. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения порядка // УФН. 1999. Т. 169, № 1. 7–38.

Архипкин В.С., Добролюбов С.А. Океанология. Физические свойства морской воды. М.: Макс-Пресс, 2005. 214 с.

Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981, 640 с.

Будыко М.И. О происхождении ледниковых эпох. // Метеорология и гидрология. 1968. № 11. С. 3–12.

Будыко М.И. Климат и жизнь. Л.: Гидрометеиздат. 1971. 472 с.

Будыко М.И. Климат в прошлом и будущем. Л.: Гидрометеиздат. 1980. 351 с.

Винников К.Я., Гройсман П.Я. Эмпирический анализ влияния CO₂ на современные изменения средней годовой температуры приземного воздуха Северного полушария // Метеорология и гидрология. 1981. № 11. С. 30–43.

Винников К.Я., Есеркепова И.Б. Эмпирические данные и результаты моделирования режима влажности почвы // Метеорология и гидрология, 1989, № 11, 64–72.

Гандин Л.С., Каган Р.Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. Л.: Гидрометеиздат. 1976. 359 с.

Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 526 с.

Гилл А.Е. Динамика атмосферы и океана. Пер. с англ. В 2 томах. М.: Мир, 1986. 812 с.

Гледзер Е.Б., Макаров А.Л. Определение эффективной вязкости в конечномерных каскадных моделях турбулентности // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1985. Т. 21, № 9. С. 899–906.

Голицын Г.С. Белый шум как основа объяснения многих статистических закономерностей в природе / Динамика природных явлений. М.: Физматлит, 2004 а. С. 300–315.

Голицын Г.С. Статистические закономерности макропроцессов: Случайные блуждания в пространстве импульсов / Динамика природных явлений. М.: Физматлит, 2004 б. С. 315–321.

Голицын Г.С., Демченко П.Ф. Статистические свойства простой энергобалансовой модели климата // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1980. Т. 16, № 12. С. 1235–1242.

Голицын Г.С., Раткович Д.Я., Фортус М.И., Фролов А.В. О современном подъеме уровня Каспийского моря // Водные ресурсы. 1998. Т. 25. С. 133–139.

- Гройсман П.Я.* Оценки изменчивости средней годовой зональной температуры воздуха // *Метеорология и гидрология*. 1987. № 3. С. 667–661.
- Груза Г.В., Ранькова Э.Я.* Климатическая изменчивость повторяемости и продолжительности основных форм циркуляции в умеренных широтах Северного полушария // *Метеорология и гидрология*, 1996, № 1. С. 12–22.
- Демченко П.Ф.* Простая статистическая модель для описания пространственно-временных корреляций флуктуаций среднеширотных температур // *Изв. АН ССР. Физика атмосферы и океана*. 1981. Т. 17, № 8. С. 805–813.
- Демченко П.Ф.* Оценки дисперсии среднеполушарной температуры по спутниковым наблюдениям за флуктуациями радиационного баланса // *Изв. АН СССР*. 1982. Т. 18, № 2. С. 138–144.
- Демченко П.Ф.* Аналитическая модель широтного хода дисперсии и спектров флуктуаций зонально-осредненной приземной температуры // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1984. Т. 20, № 2. С. 144–150.
- Демченко П.Ф.* Простая статистическая модель аномалий температуры поверхности океана с учетом сопутствующих изменений температуры воздуха // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1987. Т. 23, № 5. С. 532–537.
- Демченко П.Ф.* Анализ флуктуаций глобального климата с помощью обобщенных уравнений Ланжевена // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1989. Т. 25, № 12. С. 1245–1255.
- Демченко П.Ф.* Аналитическая модель спектра флуктуаций влагозапаса почвы. // *Метеорология и гидрология*. 1990. № 3. С. 47–54.
- Демченко П.Ф.* Интегральная модель планетарного пограничного слоя с нестационарными уравнениями для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации // *Изв. РАН ФАО*. 1993. Т. 29, № 3. С. 315–320.
- Демченко П.Ф.* Простая модель долгопериодной изменчивости влажности атмосферы с учетом ее взаимодействия с почвой // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1997. Т. 33, № 1. С. 3–9.
- Демченко П.Ф.* Динамико-стохастическая модель формирования поверхностного стока. // *Изв. АН. Физика атмосферы и океана*. 2003. Т. 39, № 2. С. 186–192.
- Демченко П.Ф., Зубарев А.П.* Оценка низкочастотной изменчивости среднезональных температур, вызванной флуктуациями меридионального переноса тепла // *Изв. АН ССР. Физика атмосферы и океана*. 1989. Т. 25, № 9. С. 917–924.
- Добровольский С.Г.* Климатические изменения в системе «гидросфера–атмосфера». М.: ГЕОС, 2002. 232 с
- Дроздов О.А, Григорьева А.С.* Влагооборот в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат. 1963. 314 с.
- Дубовиков М.М., Старченко Н.В.* Индекс вариации и его приложения к анализу фрактальных структур. Гордон: Научный альманах, 2003. С. 9–32.
- Дымников В.П.* О предсказуемости изменений климата // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана*. 1998. Т. 34, № 6. С. 741–751.
- Жарков В.Н., Трубицын В.П.* Физика Земли и планет. М.: Наука, 1978. 384 с.
- Захаров В.Ф.* Льды Арктики и современные природные процессы. Гидрометеиздат. 1981. 136 с.
- Зубарев А.П., Демченко П.Ф.* Предсказуемость среднеглобальной температуры воздуха в простой стохастической модели взаимодействия атмосферы и океана // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*. 1992. Т. 28, № 1. С. 27–32.
- Зубенок Л.И.* Испарение на континентах. Л. Гидрометеиздат, 1975. 264с.
- Исаев А.А.* Статистика в метеорологии и климатологии. М.: Изд-во МГУ. 1988. 246с.

Исаев А.А., Клименко Л.В., Жильцова О.В. Повторяемость «дождливых» и «сухих» синоптических процессов в бассейне Волги и водно-балансовые характеристики Каспия в периоды относительной стабилизации устойчивого падения и роста его уровня // Вестн. МГУ. Сер. геогр. 1995, № 1. С. 70–77.

Кайзер Дж. Статистическая механика неравновесных процессов. М.: Мир. 1990. 608 с.

Калесник С.В. Очерки гляциологии. М.: Гос. изд-во географ. лит-ры. 1963. 552 с.

Кельчевская Л.С. Влажность почв Европейской части СССР. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 183 с.

Кислов А.В. Амплитуда и периодичность колебаний глобального климата // Вестн. МГУ. Сер.5. География, 1981.

Кислов А.В. Учет изменчивости начального состояния почвы в стохастической модели влажности почвы. // Метеорология и гидрология. 1991. № 8. С. 109–111.

Кислов А.В. Теория климата. М.: МГУ, 1989. 152 с.

Кислов А.В. Климат в прошлом, настоящем и будущем. – М.: МАИК Наука/Интерпериодика. 2001. 351 с.

Кислов А.В. Стохастическая модель пространственно-временного распределения влажности почвы на территории СССР в теплый период года. // Метеорология и гидрология. 1991. № 3. С. 101–107.

Кислов А.В. Учет изменчивости начального состояния в стохастической модели влажности почвы. // Метеорология и гидрология. 1991. № 8. С. 109–111.

Кислов А.В., Торопов П.А. Моделирование стока р.Волги в атлантический оптимум голоцена в рамках моделей общей циркуляции атмосферы // Вестник Моск. Университета, сер. География. 2006. № 1. 18–28.

Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука. 1982. 608 с.

Кляцкин В.И. О шумах в гидродинамическом потоке вблизи порога неустойчивости // Изв. ВУЗов. Радиофизика. 1974. Т. 17. N 4. С. 130–141.

Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 236 с.

Кляцкин В.И. Стохастические уравнения глазами физика. М.: Физматлит. 2001.

Кляцкин В.И. Динамика стохастических систем. М.: Физматлит. 2002.

Кожевникова И.А., Найденов В.И. Нелинейная стохастическая модель колебаний уровня Каспийского моря // Водные ресурсы, 1998, 25, № 6. С. 661–670.

Косарев А.Н., Кураев А.В., Никонова Р.Е. Особенности современных гидрологических условий северного Каспия. // Вестн.Моск.Ун-та, сер.5, География, 1996, № 2. С. 47–53.

Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 1999, 350 с.

Кузнецова Е.С. Исследование предсказуемости среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии. Автореф.дис. ... к.ф.-м.н. С.П., РГГУ, 2006. 21 с.

Кукла Г. Дж. Современные изменения площади снежно-ледового покрова. В сб. Изменения климата. Ред Гриббин. Пер. с англ. Под ред. Э.К. Бютнер и В.А. Зубакова. Гидрометеиздат. 1980.

Кулямин Д.В., Володин Е.М., Дымников В.П. Моделирование квазидвухлетних колебаний зонального ветра в экваториальной стратосфере. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2008. Том 44, № 1. С. 5–20.

Кунахович М.Г., Макаров А.В., Поповнин В.В. Отклик ледника Джанкуат на ожидаемые изменения климата // Вестн. МГУ, сер. 5. География, 1996, № 1. С. 31–38.

- Куни Ф.М. Статистическая физика и термодинамика. М.: Наука. 1981. 352 с.
- Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука. 1973. 736 с.
- Луценко О.В. Временная изменчивость момента импульса атмосферы. Автореф. дис. ... к.ф.-м.н., М.: Гидрометцентр РФ, 2003.
- Манабе С., Брайен К. Климат и циркуляция океана. Л.: Гидрометеиздат. 1972. 190 с.
- Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеиздат. 1987. 294 с.
- Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1977.
- Мичурин Б.Н. Энергетика почвенной влаги. Л. Гидрометеиздат, 1975. 139 с.
- Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука. 1965. 639 с.
- Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Наука. 1967. 720 с.
- Монин А.С. Фундаментальные следствия взаимодействия атмосферы и океана // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1969. Т. 5, № 11. С. 1102–1113.
- Мошонкин С.Н., Дианский Н.А. Диагноз и моделирование аномалий температуры верхнего слоя океана в средних широтах / Вычислительные процессы и системы, вып.10, М.: Наука, 1993, 164–202.
- Николаенко А.В. О долгопериодных изменениях уровня Каспийского моря // Водные ресурсы, 1997. Т. 24. С. 261–265.
- Никонова Р.Е., Бортник В.Н. Характеристика межгодовой и сезонной изменчивости составляющих водного баланса и уровня Каспийского моря за период его современного повышения // Водные ресурсы 1994. 21, № 4. С. 410–414.
- Норт Дж. Р., Коукли Дж. А. Простые сезонные модели климата // Метеорология и гидрология. 1978. № 5. С. 26–32.
- Обухов А.М. Статистически однородные поля на сфере // УМН. 1947. Т.2. вып. 2. С. 196–198.
- Пальмен Э., Ньютон Ч. Циркуляционные системы атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 400 с.
- Патерсон У.С.Б. Физика ледников. М.: Мир, 1984, 472 с.
- Петухов В.К. О возможной множественности термических режимов атмосферы с временным масштабом порядка месяца. //Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1984. Т. 20, № 6. С. 456–468.
- Полонский А.Б. Горизонтально-неоднородный деятельный слой океана и его моделирование. Севастополь, Обнинск. ВНИИГМИ-МЦД, 1989. 234 с.
- Попова В.В. Структура многолетних колебаний атмосферных осадков на Русской равнине // Изв.РАН, Сер.Геогр., 1999, № 3. С. 40–50.
- Привальский В.Е. Климатическая изменчивость (стохастические модели, предсказуемость, спектры). М.: Наука. 1985. 183 с.
- Раткович Д.Я., Болгов М.В. Исследование вероятностных закономерностей многолетних колебаний уровня Каспийского моря // Водные ресурсы, 1994, 21. С. 389–404.
- Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976, 496 с.
- Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. М.: Физматгиз. 1968. 345 с.
- Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука. Физматлит. 1985. 480 с.
- Сидоренков Н.С. Атмосферные процессы и вращение Земли. С.П., Гидрометеиздат, 2002. 366 с.

Тужилкин В.С. Синоптическая изменчивость термической структуры вод деятельного слоя некоторых районов Северной Атлантики. Дисс. ... к.г.н. М.: МГУ, 1979. 158 с.

Ферми Э. Квантовая механика (конспект лекций). М: Мир. 1965 г. 367 с.

Физические основы теории климата и его моделирования. Труды конференции ПИГАП. Стокгольм. 1974. Перевод с англ. Под ред А.С. Монина. Л.: Гидрометеиздат. 1977.

Фортус М.И. Об эквивалентном числе независимых наблюдений // Изв. РАН Сер. Физика атмосферы и океана. 1998. 34. С. 591–599.

Фракталы в физике. Под ред. А.Пьетроноро, Э.Тозатти. М.: Мир, 1998.

Фролов А.В. Динамико-статистические методы многолетних колебаний уровня проточных озер. М.: Наука, 1985. 104 с.

Хакен Г. Синергетика. Пер. с английского по ред. Ю.Л. Климонтовича. М.: Мир. 404 с.

Холтон Дж.П. Динамическая метеорология стратосферы и мезосферы. Пер. с английского. Л.: Гидрометеиздат, 1979. 224 с.

Arnold L. Hasselmann's program revisited: The analysis of stochasticity in deterministic climate models. In: Stochastic climate models, Progress in Probability. Eds. P. Imkeller and J.-S. von Storch. Birkhauser. 2001.

Barsugli J.J., Battisti D.S., The basic effects of atmosphere-ocean thermal coupling on midlatitude variability // J. Atmos.Sci. 1998, v. 55, N 4. P. 477–493.

Benzi R., Parisi G., Sutera A., Vulpiani A. A theory of stochastic resonance in climatic change. // SIAM J. Appl. Math. 1983, v. 43, N 3. P. 565–578.

Berger, A.: Long-term variations of daily insolation and Quaternary climate changes // J. Atmos.Sci., 1978. 35. P. 2362–2367.

Berger, A., Loutre, M. F., and Melice, J. L.: Instability of the astronomical periods from 1.5myr BP to 0.5myr AP, Paleoclimates, 2(4), 239–280, 1998.

Bintanja, R. and van de Wal, R. S. W.: North American ice-sheet dynamics and the onset of 100,000-year glacial cycles. // Nature, 454, 869–872, 2008.

Braganza K., Karoly D.J. Hirst A.C., Mann M.E., Stott P., Stoufer R.J., Tett S.F.B. Simple indices of global climate variability and changes: Part I – variability and correlation structure. // Clim. Dyn. 2003. V. 20. N 5. P. 491–502.

Bretherton F.P. Ocean climate modeling. // Prog. Phys. Oceanogr. 1982. V. 11. N 2. P. 93–130.

Bretherton C.S., Battisti D.S. An interpretation of the results from atmospheric general circulation models forced by the time history of the observed sea surface temperature distribution // Geoph. Res. Lett. 2000. V. 27. N. 6. P. 767–770.

Brey J.J., Casado J.M., Morillo M. Spectral density for a nonlinear Fokker-Planck model: Monte Carlo and analytical studies. // Phys. Rev. A. 1985. V.32. N5. P. 2893–2898.

Chernyak V.Y., Chertkov M., Jarzynsky C. Parth-integral analysis of fluctuations for general Langevine processes // arXiv:cond-mat/0605471. 2006.V. 2.

Czaja A., Marshall J. On the interpretation of AGCMs response to prescribed time-varying SST anomalies. // Geoph. Res. Lett. 2000. V. 27. N 6. P. 1–4.

Crucifix M.: Global change: Climate's astronomical sensors // Nature, 456, 47–48, 2008.

Delwoth T.L., Manabe S. The influence of potential evaporation on the variabilities of simulated soil wetness and climate // J. Climate. 1988. V.1. P. 523–547.

Delwoth T.L., Manabe S. The influence of soil wetness on near-surface atmospheric variability // J. Climate. 1989. V.2. P.1447–1462.

Delwoth T., Manabe S. Climate variability and land-surface processes // Adv. Water. Res. 1993. V. 16. N 1. P. 3–20.

- Dickinson R.E.* Convergence rate and stability of ocean-atmosphere coupling schemes // *J. Atmos. Sci.* 1981. V. 38. N 10. P. 2112–2120.
- Dobrovolski S.G.* Global climate changes in water and heat transfer-accumulation processes. Development in Atmospheric Sci., vol. 21. Elsevier. Amsterdam. 1992. 280p.
- Dobrovolski S.G.* Stochastic climate theory. Models and applications. Springer Verlag, 2000. Heidelberg, Berlin, New York, Tokyo. 296 p.
- Dommenget D., Latif M.* Analysis of observed and simulated SST spectra in the midlatitudes // *Clim. Dyn.* 2002. V. 19. Nos 3–4. P. 277–288.
- Dymnikov V., Filatov A.* Mathematics of climate modeling. Birkhauser. Boston. 1997. 264 p.
- Entekhabi D., Rodriguez-Iturbe I., Castelli F.* Mutual interaction of soil moisture state and atmospheric processes // *J. Hydrology.* 1996. V. 184. N 1. P. 3–17.
- Frankignoul C* Sea surface temperature anomalies, planetary waves, and air–sea feedback in the middle latitudes // *Rev Geophys* 1985. V. 23. P. 357–390.
- Frankignoul C., Hasselmann K.* Stochastic climate models. Part II. Application to sea-surface temperature anomalies and thermocline variability // *Tellus.* 1977. V. 29. N 4. P. 284–305.
- Frankignoul C.* Stochastic forcing models of climate variability // *Dyn. Atmos. Oceans.* 1979. V. 3. Nos 2–4. P. 465–479.
- Fraedrich K.* Structural and stochastic analysis of a zero-dimensional climate system // *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 1978. V. 104. N. 440. P. 461–474.
- Frederiksen J.S.* Nonlinear albedo-temperature coupling in climate models // *J. Atmos. Sci.* 1976. V. 33. N. 12. P. 2267–2272.
- Gammaitoni, L., Hanggi, P., Jung, P., and F. Marchesoni.* Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 70, No. 1, 1998. P. 223–287.
- Glacier mass balance bulletin.* World Glacier Monitoring Service, Zurich, N 3, N9, 1994, 2007.
- Golitsyn G.S.* Almost empirical approaches to the problem of climate, it's variations and fluctuations // *Adv. In Geophys.* 1983. V. 25. P. 85–115.
- Hall A., Manabe S.* Can local linear stochastic theory explain sea surface temperature and salinity variability? // *Clim. Dyn.* 1997. V. 13. N 3, P. 167–180.
- Hasselmann K.* Stochastic climate models. Part I. Theory. // *Tellus.* 1976. V. 28. N 6. P. 473–485.
- Hartman D.J., Short D.A.* On the use of Earth radiation budget for study of cloud and climate // *J. Atm.Sci.* 1980. V. 37. N 6. P. 1233 – 1250.
- Hayes J. D., Imbrie J., and Shackleton N. J.* Variation in the Earth's orbit: pacemaker of the ice ages // *Science*, 1976, 194. P. 1121–1132.
- Hide R., Dickey J.O., Marcus S.L., et al.* Atmospheric angular momentum fluctuations during 1979–1988 simulated by global circulation models // *J.Geophys.Res.* 1997. Vol.102(D). P. 16423–16438.
- Imbrie, J., Hays, J., Martinson, D. J., et al.:* The orbital theory of Pleistocene climate: support from a revised chronology of the marine ¹⁸O record, in: *Milankovitch and Climate*, edited by: Berger, A., Imbrie, J., Hays, J., Kukla, G., and Saltzman B., The Netherlands: Reidel Publishing, Dordrecht. P. 269–305. 1984.
- Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). Climate Change 1995. The Science of Climate Change*, Houghton, J.T., Meira Filho, L.G., Calendar, B.A., Harris, N., Kattenberg, A., and Maskell, K., Eds., Cambridge:Cambridge Univ. Press, 1996.
- Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). *Climate Change 2001: The Scientific Basis.* Contribution of Working Group I to the Third Assessment Report of the Inter-

governmental Panel on Climate Change. Houghton J.T., Ding Y., Griggs D.J., Noguer M., Linden van der P.J., Dai X., Maskell K., Johnson C.A. (eds.). Cambridge/New York: Cambridge University Press. 2001. 881 p.

Joussaume, S. Modeling extreme climates of the past 20,000 yr with general circulation models, in: Modeling the Earth's climate and its variability, edited by: Holland, W.R., Joussaume, S., and David, F., Elsevier, Amsterdam and New York. P. 527–565, 1999.

Jones P.D., Moberg A. Hemispheric and large-scale surface air temperature variations: an extensive revision and an update to 2001. *J. Climate.* 2002. V. 16. P. 206–203.

Kalnay E., Kanamitsu M., Kistler R., Collins W., Deaven D., Gandin L., Iredell M., Saha S., White G., Woollen J., Zhu Y., Chelliah M., Ebisuzaki W., Higgins W., Janowiak J., Mo K.C., Ropelewski C., Wang J., Leetmaa A., Reynolds R., Jenne R., Joseph D. The NCEP/NCAR 40-year reanalysis project. *Bull. Amer. Met. Soc.* 1996. V. 77. N. 3 P. 437–471.

Kislov, A. V., Tarasov, P. E., and Sourkova, G. V. Pollen and other proxy-based reconstructions and PMIP simulations of the Last Glacial Maximum mean annual temperature: an attempt to harmonize the data – model comparison procedure // *Acta Palaeontol. Sin.*, 41. P. 539–545, 2002.

Kominz, M. A. and Pisias, N. G. Pleistocene climate: deterministic or stochastic? // *Science*, 204. P. 171–173, 1979.

Kraus E.B., Morrison R.E. Local interactions between the sea and the air at monthly and annual time scales // *Quart. J. Roy. Met. Soc.* 1966. V. 62. N. 391. P. 114–127.

Lemke P. Stochastic climate models. Part 3. Applications to zonally averaged models // *Tellus.* 1977. V. 29. N 5. P. 385–392.

Lian M.S., Cess R. D. Energy-balance climate models: a reappraisal of ice-albedo feedback. // *J. Atmos. Sci.* 1977. V. 34. N 7. P. 1058–1062.

Lloyd E.H. The stochastic reservoir: exact and approximate evaluations of the storage distribution // *J. of Hydrology*, 151, (1993). P. 65–107.

Manabe S., Stouffer R.J. Low-frequency variability of surface air temperature in a 1000-year integration of a coupled atmosphere-ocean-land surface model // *J. Clim.*, 1996, Vol. 9. P. 376–393.

Mazo R.M. Aspects of the theory of Brownian motion. Lecture notes in physics. 1978. V.4. Stochastic processes in nonequilibrium systems. (Sitges. Troc. 1978). P. 54–81.

MEDOC Group, Observation of formation of deep-water in the Mediterranean Sea, 1969 // *Nature*, 1970, vol. 227 No. P. 1037–1040.

Mori H., Morita T., Mashiyama K.T. Construction of state variables in non-equilibrium systems // *Progr. Theor. Phys.* 1980. V.63. N. 6. P. 1865–1884.

Nicolis C. Stochastic aspects of climatic transitions – response to a periodic forcing // *Tellus*, 34, 1–9, 1982.

North G.R., Coakley J.A. Differences between seasonal and mean annual energy balance model calculations of climate and climate sensitivity // *J. Atmos. Sci.* 1979. V. 36. P. 1189–1203.

North G.R., Cahalan R.F. Predictability in a solvable stochastic climate model. // *J. Atmos. Sci.* 1981. V. 38. N 3. P. 504–513.

North G.R., Cahalan R.F., Coakley J.A. Energy balance climate models. // *Rev. Geoph. Space. Phys.* 1981. v. 19. N. 1. P. 91–122.

Oerlemans J., B. K. Reichert, 2000: Relating glacier mass balance to meteorological data using a seasonal sensitivity characteristic (SSC). // *J. Glaciol.*, 46, 1–6.

Oerlemans J. Minimal glacier models. Igitur, Utrecht Publishing & Archiving Services, Universiteitsbibliotheek Utrecht. 2008. ISBN 978-90-6701-022-1.

Oort A.H., Rosmusson E.M. Atmospheric circulation statistics. NOAA Prof. Pap. № 5. Rockville, Md. 1971.

- Reichert B. K., Bengtsson L., Oerlemans J.* Recent Glacier Retreat Exceeds Internal Variability. // *J. Climate*, 15, 2002. P. 3069–3081.
- Risken H.* The Fokker-Plank equation. Springer-Verlag, Berlin. 1989. 485 p.
- Reynolds R.H.* Sea surface temperature anomalies in the North Pacific Ocean. // *Tellus*. 1978. V. 30. N 2. P. 97–93.
- Salmon R., Hendershott M.C.* Large scale air-sea interaction with a simple general circulation model. // *Tellus*. 1976.V. 3. P. 228–242.
- Schott F., Visbeck M., Fisher J.* Observations of vertical currents and convection in the central Greenland Sea during the winter of 1988/89 // *J. Geophys. Res.*, 1993, vol. 98, No C8. P. 14401–14421.
- Semenov V., Bengtson L.* Secular trends in daily precipitation characteristics: greenhouse gas simulation with a coupled AOGSM// *Climate Dynamics*. V. 19. P. 123–140.
- Schlesinger, M. E., Verbitsky, M.* Simulation of glacial onset with a coupled atmospheric general circulation/mixed-layer ocean – ice-sheet/asthenosphere model // *Palaeoclimates*, 2, 179–201, 1996.
- Stone P.H., Chan S.R., Spiegel D., Rombaldi S.* Short term fluctuations in the eddy flux and baroclinic stability of the atmosphere // *J. Atmos. Sci.* 1982. V. 39. N 6. P. 1734–1736.
- Thompson S. L., Schneider S. H.* A seasonal zonal energy-balance climate model with an interactive lower layer. // *J. Geophys. Res.* 1979. V. 84. N. C5. P. 2401–2414.
- Sutera A.* On stochastic perturbations and long-term climate behavior. *Quart.* // *J. Roy. Met. Soc.* 1981. V. 107. N. 451. P. 137–151.
- Vinnikov K.Ya., Yeserkepova I.B.* Soil moisture: empirical data and model results. // *J. Climate*. 1991. V. 4. N 1. P. 66–79.
- Wiesenfeld, K., Moss, F.* Stochastic resonance and the benefits of noise: from ice ages to crayfish and SQUIDS // *Nature*, 373, 33–36, 1995.
- Wunsch C.*: The spectral description of climate change including the 100 ky energy // *Clim. Dyn.*, 20, 353–363, 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава 1. Хаотичность как типичное явление динамики окружающей среды	8
1.1. Эмпирические данные о динамике природных процессов.....	8
1.2. Свойства решения уравнения Ланжевена, классическое и фрактальное броуновское движение.....	17
Глава 2. Физические основы построения стохастических дифференциальных уравнений для природных объектов	26
2.1. Разделение переменных и движений на быстрые и медленные в природных системах.....	26
2.2. Уравнения Ланжевена медленных переменных: общая теория и простой климатический пример.....	38
2.3. Плотность вероятностей флуктуаций: уравнение Фоккера–Планка и пример применения к расчету спектра нелинейного природного объекта.....	47
2.4. Описание предсказуемости стохастических природных процессов в рамках уравнений Ланжевена.....	58
Глава 3. Стохастические модели различных природных объектов	65
3.1. Динамика аномалий температуры и солёности в деятельном слое Мирового океана.....	65
3.2. Расчет интенсивности флуктуаций температуры поверхности океана с учетом нелокальных эффектов.....	77
3.3. Динамика горных ледников.....	88
3.4. Стохастические колебания уровней озёр.....	98
3.5. Внутрисезонные вариации влажности почвы как характеристика состояния увлажнения материков.....	105
3.6. Стохастическая модель флуктуаций среднесезонных температур.....	111
3.7. К теории ледниковых-межледниковых циклов.....	126
3.8. О природе неравномерности вращения Земли.....	132

Глава 4. Обобщенные соотношения Ланжевена и метод эквивалентных стохастических систем	143
4.1. Вывод обобщенных соотношений Ланжевена методом проекционных операторов.....	143
4.2. Пример применения метода эквивалентных стохастических систем в задаче о флуктуациях глобальной температуры приземного воздуха.....	154
4.3. Предсказуемость температуры воздуха в простой стохастической модели взаимодействия атмосферы и океана.....	163
4.4. Стохастическое моделирование флуктуаций влажности атмосферы при взаимодействии с почвенной влагой.....	169
Литература	180

Научное издание

**Павел Феликсович Демченко,
Александр Викторович Кислов**

**СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА
ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ**

**Броуновское движение
и геофизические приложения**

Редактор издательства *Г.М. Орлова*

Макет *Р.И. Недумов*

Подписано к печати 16.12.2010.

Формат 70х100 1/16. Бумага офсетная № 1, 80 г/м².

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 16,0.

Тираж 400 экз.

ООО “Издательство ГЕОС”

129315, Москва, 1-й Амбулаторный пр-д, 7/3-114.

Тел./факс: (495) 959-35-16, (499) 152-19-14, 8-926-222-30-91.

e-mail: geos-books@yandex.ru, geos@ginras.ru

www.geos-books.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в ПИК “Идел-Пресс”
420066, Республика Татарстан, г.Казань, ул.Декабристов, 2.

Лист исправлений

стр. 62

$$J_S(t) = 2 \frac{\langle (\Delta T_S^{(n)}(t))^2 \rangle_0}{\sigma_{st}^2} - 1 \quad (2.4.8)$$

правильно

$$J_S(t) = 2 \frac{\langle (\Delta T_S^{(d)}(t))^2 \rangle}{\sigma_{st}^2} - 1 \quad (2.4.8)$$

стр. 63

считается, что $\langle (\Delta Y^{(d)})^2 \rangle_0 = \langle (\Delta Y^{(n)})^2 \rangle_\infty$, то

считается, что $\langle (\Delta Y^{(d)})^2 \rangle_0 = \langle (\Delta Y^{(n)})^2 \rangle_\infty$, то

стр. 63

$$J_{k*}(t) = 2 \frac{\langle \delta Y_{kk}^{2*}(t) \rangle}{\langle \delta Y_{kk}^2(0) \rangle} - 1 = 0 \quad (2.4.8)$$

$$J_{k*}(t) = 2 \frac{\langle \Delta(Y^{(d)})^2_{kk}(t) \rangle}{\langle \Delta(Y^{(d)})^2_{kk}(0) \rangle} - 1 = 0 \quad (2.4.8)$$

стр. 64

В одномерном случае согласно (2.2.5)

$$\langle (\Delta T_S^{(n)}(t))^2 \rangle = \sigma_{st}^2 \exp(-2t / \tau_T),$$

В одномерном случае согласно (2.4.5)

$$\langle (\Delta T_S^{(d)}(t))^2 \rangle = \sigma_{st}^2 \exp(-2t / \tau_T)$$

стр. 154

Если $\langle U | Y \rangle = F_Y(Y) + GX + \delta U_\Delta$, причем δU_Δ не зависят от Y , уравнение (4.1.36) переходит в $\frac{dY(t)}{dt} = \langle U | Y(t) \rangle = F_Y(Y(t)) + GX(t) + \delta U_\Delta(t)$ (4.1.36a).

Если $U = F_Y(Y) + GX + \delta U_\Delta$, причем δU_Δ не зависят от $\{X, Y\}$, уравнение (4.1.36) переходит в $\frac{dY(t)}{dt} = F_Y(Y(t)) + GX(t) + \delta U_\Delta(t)$ (4.1.36a).

стр. 161

Тогда, согласно (4.2.8), спектр флуктуаций осредненной по теплоизолированной с боковых границ области температуры воздуха в интерактивном....

Тогда, согласно (4.2.6), спектр флуктуаций осредненной по теплоизолированной с боковых границ области температуры воздуха в интерактивном.....